Formação de professores (Vol. 3)
ISBN: 978-65-5222-025-7

10.46943/X.CONEDU.2024.GT01.011

OBJETOS DE APRENDIZAGEM PARA O ENSINO DA SEQUÊNCIA DE PADOVAN: UMA PROPOSTA COM APORTE DO GEOGEBRA

Renata Passos Machado Vieira[1]
Renata Teófilo de Sousa[2]
Francisco Régis Vieira Alves[3]

RESUMO

O estudo de sequências recorrentes desempenha um papel importante em diversas áreas. Compreender esses números, sua regra de formação e teoremas matemáticos, enriquecem a entendimento dos estudantes sobre padrões matemáticos, relações recursivas e a aplicação de matemática em contextos do mundo real. No entanto, outras sequências, para além da famosa sequência de Fibonacci, acabam por receber menor ênfase nas aulas de matemática. Nesse contexto, destacamos a análise de uma destas sequências em particular, sequência de Padovan, enfatizando sua representação geométrica e forma matricial, dadas as poucas pesquisas voltadas para o seu ensino, o que revela um caráter de originalidade neste estudo. Dessa forma, o objetivo desta pesquisa é construir uma abordagem didática voltada para o ensino da sequência de Padovan, a partir da construção de um repositório de objetos de aprendizagem construídos e disponibilizados na comunidade do GeoGebra. A metodologia deste estudo é de natureza qualitativa e exploratória, realizando um mapeamento das construções disponíveis no repositório de mídias digitais da comunidade GeoGebra. Com isso, é apresentada uma proposta de ensino voltada aos anos finais do Ensino Médio, com a utilização de dois objetos de aprendizagem,

1 Doutoranda pelo Programa de Pós-graduação em Ensino - Rede Nordeste de Ensino (RENOEN) da Universidade Federal do Ceará (UFC), re.passosm@gmail.com;

2 Doutoranda pelo Programa de Pós-graduação em Ensino - Rede Nordeste de Ensino (RENOEN) do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE), rtsnaty@gmail.com;

3 Doutor em Educação pela Universidade Federal do Ceará. Professor titular do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE), fregis@ifce.edu.br;

ISBN: 978-65-5222-025-7

visando explorar a representação geométrica e sua visualização, bem como a forma matricial dos números de Padovan. Além disso, é realizada uma breve análise de uma possível aplicação do conteúdo no contexto da sala de aula. Essa proposta busca impulsionar o progresso dos estudantes, ampliando as possibilidades de aprendizado e construção do conhecimento. Como perspectiva futura, almeja-se a implementação das atividades propostas e a análise dos resultados obtidos em turmas dos anos finais do Ensino Médio em aulas de Matemática.
Palavras-chave: Sequência de Padovan, Sequências Recorrentes, Objetos de Aprendizagem, GeoGebra.

ISBN: 978-65-5222-025-7

INTRODUÇÃO

O ensino de sequências recorrentes enfatiza o desenvolvimento de competências e habilidades relacionadas à construção de sequências, permitindo que haja a formulação de hipóteses lógicas e a compreensão das propriedades matemáticas estabelecidas (Boyer, 2012; Eves, 2011). De modo substancial, tem-se o estudo somente da sequência de Fibonacci, ausentando outras sequências recorrentes, como é o caso da sequência de Padovan (Vieira, 2020).

Dessa forma, observa-se que, ao serem apresentados aos estudantes, os números pertencentes à sequência de Padovan são estudados apenas sob o aspecto de sua recorrência, sem permitir uma investigação mais aprofundada desses números e de sua representação geométrica (forma de visualização). Assim, há uma ausência de integração do conteúdo de sequências com a Geometria, Matrizes e outros assuntos relacionados.

Além disso, sabe-se que a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Brasil, 2018) consubstancia a importância da visualização, como habilidade necessária para a concepção de conjecturas e o desenvolvimento de técnicas para expressar noções e estratégias.

Nesse contexto, é possível destacar o *software* GeoGebra como recurso tecnológico de fácil manuseio e gratuito, trazendo um conjunto de potencialidades que podem apoiar a prática docente, auxiliando especialmente no que diz respeito à visualização matemática de conteúdos que são considerados de complexa assimilação, facilitando a compreensão do aluno através da visualização e abordagem interativa (Alves, 2019; Alves; Dias, 2019).

Como professores, percebemos com frequência que os alunos enfrentam obstáculos na compreensão de determinados conteúdos matemáticos, especialmente no que diz respeito à elaboração do raciocínio intuitivo e geométrico. Isso evidencia lacunas na assimilação de teoremas e axiomas, bem como na compreensão da relação entre eles. Além disso, é comum associar a solução de problemas ao uso de fórmulas e algoritmos prontos, o que pode não estimular de fato a evolução do pensamento dos alunos a partir de uma compreensão visual e intuitiva (Settimy; Bairral, 2020).

Pensando nas dificuldades do estudo de sequências nos anos finais do Ensino Médio, o objetivo deste trabalho é construir uma abordagem didática voltada para o ensino da sequência de Padovan, a partir da construção de

Formação de professores (Vol. 3)
ISBN: 978-65-5222-025-7

um repositório de objetos de aprendizagem construídos e disponibilizados na comunidade do GeoGebra.

A partir disto, almeja-se construir uma abordagem didática, explorando dois objetos de aprendizagem disponíveis na comunidade GeoGebra, que abrangem a forma geométrica e matricial da sequência, no intuito de promover o desenvolvimento de habilidades de visualização e raciocínio intuitivo.

O GeoGebra tem grande potencial para demonstrar claramente a representação geométrica da sequência de Padovan e sua forma matricial, dadas as fortes propriedades de trabalhar com Álgebra e Geometria de forma integrada, possibilitando demonstrações dinâmicas com precisão matemática (Alves, 2019; 2020).

A metodologia deste estudo é de natureza qualitativa, sendo uma pesquisa básica que busca ampliar o olhar sobre o tema e sua discussão. Para atingir os objetivos deste trabalho, utilizamos a metodologia de cunho qualitativo e exploratório, orientando o caminho da pesquisa (Creswell, 2013). Assim, são selecionados dois objetos de aprendizagem da comunidade GeoGebra para o estudo da sequência de Padovan.

Nas seções seguintes apresentamos um breve referencial teórico contemplando uma explicação referente à sequência de Padovan, a abordagem metodológica deste trabalho com os objetos selecionados e sua possível utilização em sala de aula com o aporte do *software* GeoGebra. Feito isso, apresenta-se uma proposta didática sugerida para o Ensino Médio.

REFERENCIAL TEÓRICO

A sequência de Padovan é uma sequência recorrente de terceira ordem, tendo seu nome atribuído ao arquiteto italiano Richard Padovan, o qual considerou esses números com base em seu estudo referente ao arquiteto Hans van der Laan (Vieira, 2020).

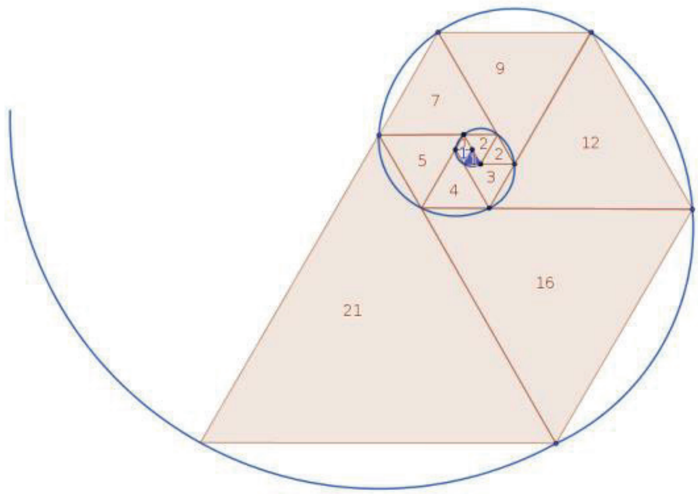
De fato, essa sequência possui relação com uma constante irracional (1,32), denominada de número plástico, descoberto por Hans van der Laan (Padovan, 1994; Ferreira, 2015). Porém, o matemático francês Gérard Cordonnier realizou estudos anteriormente sobre esses números, falecendo antes de publicar suas descobertas (Stewart, 1996). Por isso, a sequência também é conhecida como sequência de Hans van der Laan ou Cordonnier. Essa sequência também

ISBN: 978-65-5222-025-7

aparece em diversas aplicações, como modelagem matemática de estruturas cristalinas e em problemas de Teoria dos Números.

A fórmula de recorrência é dada por $P_n = P_{n-2} + P_{n-3}$, $n \geq 3$, em que P_n é o n-ésimo termo da sequência de Padovan e os valores iniciais são $P_0 = P_1 = P_2 = 1$. Uma representação geométrica é dada como forma de visualização desses números, representando a espiral de Padovan (Figura 1):

Figura 1 – Espiral de Padovan



Fonte: Vieira (2020).

A construção da espiral é realizada mediante a adição de triângulos equiláteros, ajustando suas dimensões de acordo com o maior lado do polígono previamente formado. Essa abordagem proporciona a continuidade na formação do padrão geométrico, estabelecendo uma relação coesa e consistente entre os elementos que compõem o conjunto. Essa prática de inserção estratégica de triângulos equiláteros contribui para a progressão harmônica e a construção progressiva da estrutura geométrica da sequência.

O polinômio característico de Padovan é dado por uma equação de terceiro grau, da forma $x^3 - x - 1 = 0$, apresentando três soluções, sendo uma delas real e dada pelo número plástico.

Uma forma também de obter esses termos é pela sua forma matricial, desenvolvida por Sokhuma (2013), a partir do Teorema 1:

Teorema 1. Para $n \geq 3$, a forma matricial da sequência de Padovan, é dada por:

ISBN: 978-65-5222-025-7

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{n+1} \\ P_{n+2} \\ P_{n+3} \end{pmatrix}$$

A demonstração é realizada por meio do processo de indução finita, substituindo inicialmente o valor de para 3. Com isso, são verificados os termos subsequentes, após o cálculo matricial. Em seguida, verifica-se os demais passos do processo de indução (para $n = k$ e $n = k + 1$) validando o teorema matemático. Para mais detalhes, sugere-se a leitura do artigo de Sokhuma (2013), que trata desse teorema, bem como outros referentes à forma matricial da sequência de Padovan.

Vale destacar também a discussão sobre a sequência de Fibonacci, que se torna pioneira ao abordar a relação entre pares de coelhos e números imortais, consolidando-se como um marco inicial no estudo das sequências recorrentes. A sua recorrência é dada por: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $n \geq 2$, em que F_n é o n-ésimo termo da sequência e cujos valores iniciais são dados por $F_0 = F_1 = 1$. O polinômio característico de Fibonacci, é dado por uma equação de segundo grau, em que $x^2 x 1 0$, apresentando duas soluções reais (Oliveira, 2018).

A partir da explanação apresentada, a seção seguinte traz a metodologia do trabalho.

METODOLOGIA

Esta seção dedica-se a realização dos caminhos metodológicos diante do objeto de estudo matemático e da investigação em torno dos objetos de aprendizagem voltados a esse. Assim, inicialmente foi realizado um levantamento bibliográfico em torno da sequência de Padovan e dos objetos de aprendizagem selecionados e disponíveis no *software* GeoGebra.

A comunidade GeoGebra trata-se de um repositório de aplicações desenvolvidos com o *software* GeoGebra, elaborados por diversos membros cadastrados na plataforma, permitindo que os objetos de aprendizagem sejam visualizados e baixados para os seus respectivos dispositivos. Com isso, gera a possibilidade de introduzi-los em sala de aula de forma gratuita, explorando diversos assuntos e áreas de ensino, além do compartilhamento de recursos.

Sugere-se que o estudo da sequência de Padovan inicie a partir do resgate alguns aspectos históricos e matemáticos, para que os estudantes possam

Formação de professores (Vol. 3)
ISBN: 978-65-5222-025-7

adquirir conhecimentos prévios. Após isso, os objetos de aprendizagem disponíveis na comunidade GeoGebra devem ser apresentados, para que assim possam ser selecionados dois desses, com o viés de explorar esses números nas aulas de Matemática dos anos finais do Ensino Médio.

Ao buscarmos mapear as construções sobre os números de Padovan e sua sequência na comunidade do GeoGebra, encontramos algumas atividades que podem ser replicadas como objetos de aprendizagem em sala de aula. Ressalta-se que ao realizarmos a busca utilizamos inicialmente os termos "números de Padovan" e "sequência de Padovan", mas não encontramos construções relacionadas, pois não há trabalhos desenvolvidos em língua portuguesa sobre o tema dentro da comunidade.

Em seguida, ao inserirmos apenas a palavra "Padovan", surgiram opções de materiais que podem ser utilizados, no idioma holandês, os quais mapeamos e catalogamos no Quadro 1:

Quadro 1: Mapeamento das construções sobre a sequência de Padovan.

Título no repositório	Link de acesso
Padovan meetkundig	https://www.geogebra.org/m/G2M9CBq6
Padovan Triangular Spiral	https://www.geogebra.org/m/egBmghbX
Padovan-Folge	https://www.geogebra.org/m/yxpuuchm
het plastisch getal	https://www.geogebra.org/m/np6KstmG
ruimtelijke voorstelling	https://www.geogebra.org/m/hgUg9gWM
rij als spiraal	https://www.geogebra.org/m/RZqZxeTj
Padovan Spiral	https://www.geogebra.org/m/A5K3EENg
Espirales, iris y girasoles	https://www.geogebra.org/m/pfnkr2cd
berekenen met matrices	https://www.geogebra.org/m/De97zKyV

Fonte: Geogebra.org

A investigação foi aprofundada com a seleção de dois objetos de aprendizagem dos materiais catalogados no Quadro 1. Uma abordagem didática foi elaborada para esses números, focando na compreensão da sequência e sua visualização, com uma proposta de aplicação para aulas de Matemática na Educação Básica. Este enfoque visa estimular o lado intuitivo e a capacidade investigativa dos participantes envolvidos na pesquisa, proporcionando uma compreensão mais abrangente e aprofundada dessa sequência recorrente, especialmente nos anos finais do Ensino Médio.

Formação de professores (Vol. 3)
ISBN: 978-65-5222-025-7

Buscou-se selecionar objetos de aprendizagem que enfocam a representação geométrica da sequência de Padovan e sua forma matricial (Teorema 1) para explorar a visualização e outros métodos didáticos no estudo de sequências. Os objetos de aprendizagem escolhidos da comunidade GeoGebra foram *Padovan-Folge* e *berekenen met matrices*. O primeiro trata da representação geométrica da sequência de Padovan, enquanto o segundo aborda sua forma matricial. Esses dois objetos foram selecionados por serem mais adequados para o Ensino Médio, pois facilitam a compreensão dos conceitos abstratos por meio de representações visuais de forma prática. Almeja-se que a utilização desses recursos pedagógicos possam proporcionar uma abordagem mais intuitiva e investigativa, essencial para o desenvolvimento do raciocínio matemático dos estudantes.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Esta seção apresenta uma proposta didática com duas atividades, baseada em dois objetos de aprendizagem selecionados da comunidade GeoGebra. A partir disso, são elencados os procedimentos que podem ser utilizados em sala de aula em uma possível aplicação nos anos finais do Ensino Médio. Tão logo, as aplicações podem ser obtidas no próprio site GeoGebra, cujos respectivos nomes são dados por: Padovan-Folge e berekenen met matrices, escolhidos pelos autores dos objetos desenvolvidos.

A aplicação denominada de Padovan-Folge, tem como objetivo apresentar a representação geométrica da sequência de Padovan, possibilitando ao estudante visualizar a construção dos triângulos equiláteros e compreender a regra de formação existente.

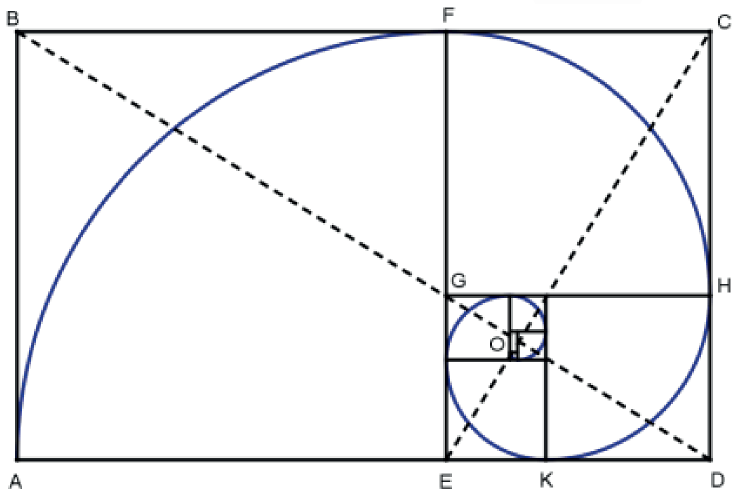
Antes de tudo, é necessário que o professor tenha iniciado o conteúdo de sequências, apresentando aos estudantes a relação com os números pertencentes à uma determinada sequência recorrente e a sua respectiva fórmula de recorrência. É recomendado que o professor realize um estudo da sequência de Fibonacci, resgatando a sua história e algumas propriedades matemáticas básicas, tais como a forma matricial e sua representação geométrica.

Na Figura 2 tem-se retratada a espiral de Fibonacci, possibilitando compreender a regra de construção dos retângulos. De fato, pode-se perceber que o novo retângulo é inserido de acordo com o maior lado do novo polígono formado, permitindo que os números de Fibonacci sejam visualizados e formem

ISBN: 978-65-5222-025-7

a conhecida espiral. Ramos (2013) desenvolveu a espiral de Fibonacci, denominando-a de espiral áurea e utilizando o *software* GeoGebra. Assim, o autor relata que a regra de construção é dada como sendo "a partir da sequência infinita de retângulos áureos, podemos desenhar a espiral áurea traçando o quarto de circunferência de cada um dos quadrados".

Figura 2 – Espiral de Fibonacci



Fonte: Ramos (2013).

A partir disso, o professor poderá iniciar a atividade com o objeto de aprendizagem, utilizando o controle deslizante com $n = 3$, para que assim possam ser visualizados os três primeiros triângulos de tamanhos iguais a 1. Esses valores representam os termos iniciais da sequência de Padovan e é necessário que sejam disponibilizados, visto que sem esses valores os estudantes não saberão qual o tamanho dos triângulos que irão aparecer e nem o local correto em que serão inseridos.

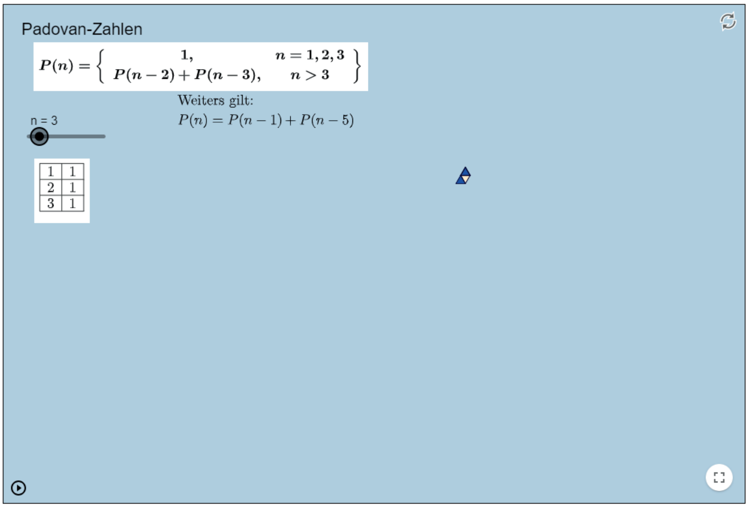
Assim, a Figura 3 apresenta a forma como os estudantes irão visualizar a atividade de forma imediata, tendo o seu contato inicial com a fórmula de recorrência e os triângulos equiláteros disponíveis. Com isso, espera-se que busquem em seus conhecimentos prévios qual o tamanho do próximo triângulo a ser inserido e qual o tamanho que este deve ter, observando a relação de recorrência e os valores já estabelecidos nos triângulos presentes.

Ainda nesse momento, é interessante que os estudantes tenham compreendido a regra de construção da representação geométrica de Fibonacci e a relação de recorrência de Padovan, para que assim possam avançar na ati-

ISBN: 978-65-5222-025-7

vidade e conseguir um pensamento intuitivo diante da visualização da figura apresentada.

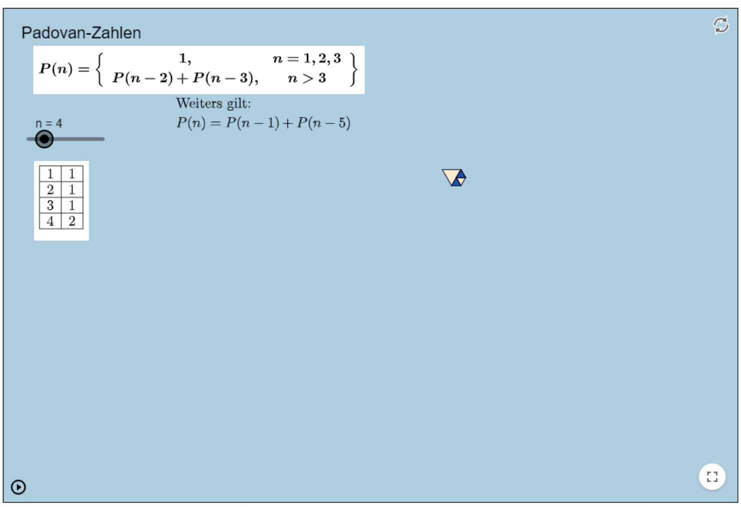
Figura 3 – Tela inicial do objeto de aprendizagem



Fonte: Comunidade GeoGebra.org

Na Figura 4 é demonstrada a resposta esperada dos alunos ao inserir um triângulo de tamanho 2, seguindo a lógica da soma dos dois triângulos de tamanho 1. Ademais, estimula-se que busquem quais os novos triângulos que vão ser inseridos e o local onde cada um deverá ocupar na figura:

Figura 4: Resposta referente ao próximo triângulo inserido

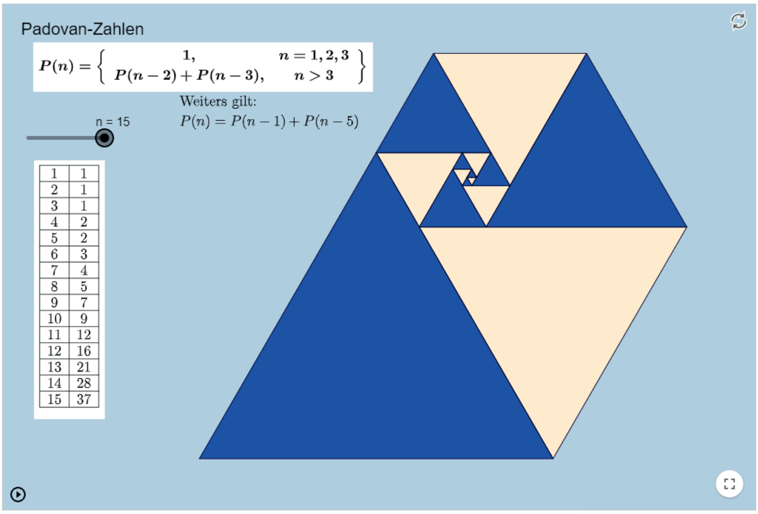


Fonte: Comunidade GeoGebra.org

Formação de professores (Vol. 3)
ISBN: 978-65-5222-025-7

Finalizando a atividade, tem-se a Figura 5 em que apresenta a representação geométrica, denominada de espiral de Padovan por formar uma espiral seguindo os triângulos equiláteros inseridos:

Figura 5: Espiral de Padovan (Representação geométrica)



Fonte: Comunidade GeoGebra.org

Com isso, espera-se que os estudantes compreendam que os triângulos são inseridos de acordo com o maior lado do novo polígono formado. Para tanto, tem-se os valores da sequência variando de $n = 1$ até $n = 15$, sendo possível movimentar a construção por meio do controle deslizante. A tabela (ao lado esquerdo da Figura 5) permite que sejam verificados os valores pertencentes à sequência de Padovan, interligando o conteúdo de Geometria com sequências recorrentes (Álgebra).

É importante a integração de demais conteúdos da Matemática, uma vez que muitos estudantes não compreendem a necessidade de estudar determinados assuntos, além de que não conseguirem assimilar e contextualizar a ligação que existe entre diversas áreas e assuntos. A exemplo disso, o professor pode ainda citar algumas aplicações da sequência de Fibonacci na natureza (Ramos, 2013), permitindo diversas contribuições em simetria e entre outros. Tem-se ainda a relação da sequência de Padovan com a arquitetura e padrões de medida, explorando o número plástico, oriundo da divisão de um termo da sequência pelo seu anterior $\frac{P_n}{P_{n-1}} \approx 1,32$ (Vieira, 2020).

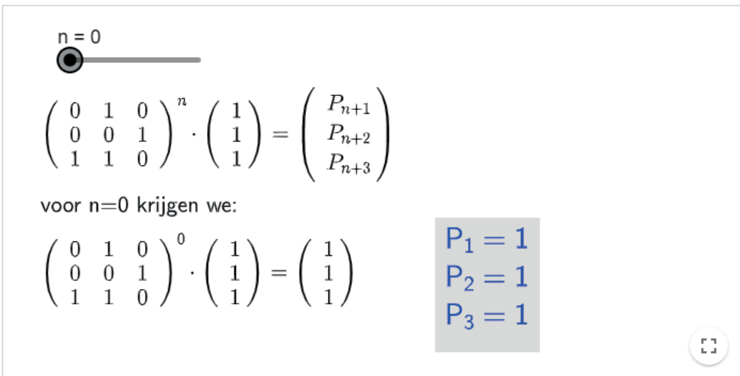
ISBN: 978-65-5222-025-7

Por fim, na exploração deste primeiro objeto de aprendizagem, tem-se que o professor poderá mostrar o passo-a-passo da construção da espiral (representação geométrica), por meio do botão com formato de seta (localizado abaixo da espiral). Permitindo desse modo, que os participantes possam verificar as estratégias utilizadas, potencializando o que foi compreendido e os erros que venham a ser cometidos.

A segunda atividade proposta é denominada na comunidade GeoGebra de berekenen met matrices e tem como objetivo estudar o teorema referente à forma matricial da sequência de Padovan.

Tão logo, tem-se a Figura 6, permitindo uma visualização da tela inicial do objeto de aprendizagem em que os estudantes irão deparar-se inicialmente. Feito isso, o professor deve mostrar a forma matricial como uma alternativa de obter os termos da sequência, sem utilizar necessariamente a recorrência propriamente dita:

Figura 6: Forma matricial de Padovan (inicial)



Fonte: Comunidade GeoGebra.org

A *priori*, o professor pode apresentar a composição da forma matricial de Padovan (ver Figura 7), destacando:

- a parte cinza representa os zeros de preenchimento da matriz, possuindo a sua quantidade dada pela ordem da sequência menos 1 (por isso tem-se a quantidade de somente dois zeros para Padovan de terceira ordem);

ISBN: 978-65-5222-025-7

- a parte vermelha representa a matriz identidade, possuindo a sua ordem em relação à ordem da sequência (por isso tem-se a matriz identidade 2 x 2);
- a parte azul é denominada de operador e apresenta os coeficientes da recorrência da sequência (Vieira, Alves, Catarino e Rodrigues, 2020). Como a sequência de Padovan pode ser reescrita na forma $P_n = 0P_{n-1} + 1P_{n-2} + 1P_{n-3}$, n≥3 então pode-se observar a presença dos coeficientes 0,1,1;
- a outra matriz contida somente com os números 1s, possui os valores iniciais da sequência, denominada de vetor de inicialização.

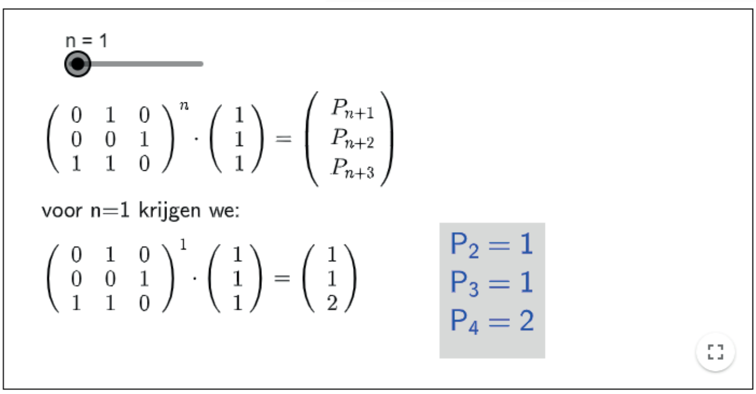
Figura 7: Composição das matrizes

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{n+1} \\ P_{n+2} \\ P_{n+3} \end{pmatrix}$$

Fonte: Elaborado pelos autores.

Após essa explicação, espera-se que os estudantes constatem que ao elevar a matriz a valores numéricos de , obterão os termos da sequência de Padovan de forma rápida e matricial. A Figura 8 apresenta o cálculo para o valor de = 1, permitindo que sejam retomados os conceitos de sequências recorrentes e multiplicação de matrizes. Logo, ao elevar a matriz a 1, será obtida a mesma matriz e, após isso, multiplicada pelo vetor de inicialização. Resulta-se nos valores 1,1 e 2, que representam os termos de P_2 1,P_3 1,P_4 2.

Figura 8: Forma matricial de Padovan (continuidade da atividade)



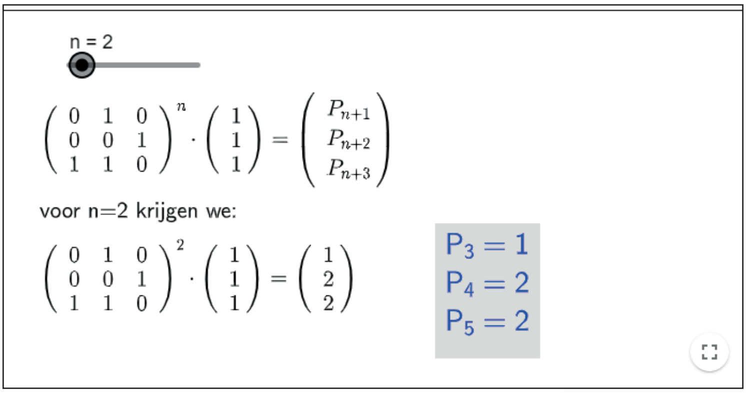
Fonte: Comunidade GeoGebra.org

ISBN: 978-65-5222-025-7

A Figura 9 permite a realização do cálculo para n = 2, vislumbrando os passos realizados para a obtenção de demais valores da sequência de Padovan pelo método matricial. Assim, para n = 2, tem-se que:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^2 . \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_3 = 1 \\ P_4 = 2 \\ P_5 = 2 \end{pmatrix}.$$

Figura 9: Forma matricial de Padovan (seguimento da atividade)

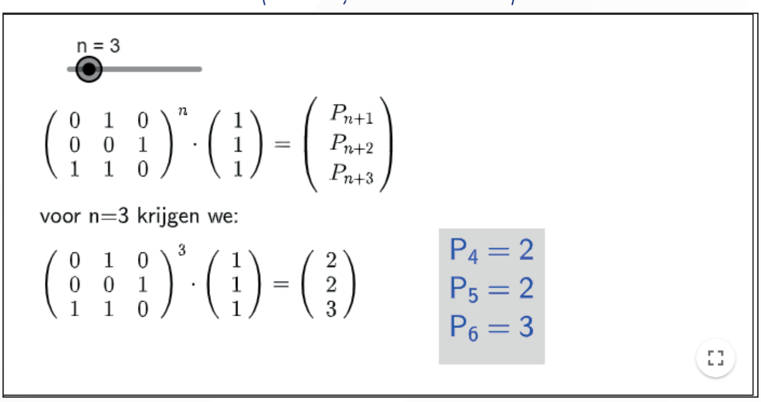


Fonte: Comunidade GeoGebra.org

Por fim, a Figura 10 avança um pouco mais, substituindo o valor de = 3. Tão logo, tem-se que o cálculo realizado permitirá chegar a conclusão:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^3 . \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_4 = 2 \\ P_5 = 2 \\ P_6 = 3 \end{pmatrix}$$

Figura 10: Forma matricial de Padovan (finalização da atividade)



Fonte: Comunidade GeoGebra.org

Formação de professores (Vol. 3)
ISBN: 978-65-5222-025-7

A aplicação oferece a capacidade de calcular valores superiores para , seguindo o mesmo método apresentado para os valores anteriores. Este recurso de aprendizagem é relevante, pois permite aos alunos confirmar seus cálculos e proporciona uma visualização detalhada dos passos e procedimentos utilizados para determinar os termos da sequência de Padovan. Deste modo, a atividade proposta pode promover a compreensão da estrutura da sequência, a partir da interação com o material, permitindo aos estudantes explorar e experimentar ativamente o processo matemático.

O primeiro objeto de aprendizagem explorado também proporciona uma relevância para as práticas pedagógicas nos anos finais do Ensino Médio, visto que resgata a visualização e forma geométrica da sequência, permitindo incentivar o lado intuitivo dos estudantes diante de uma abordagem geométrica e integração do conteúdo de sequências recorrentes com a Geometria. O GeoGebra traz um suporte diferenciado nesse sentido, tornando um facilitador do conteúdo, bem como das práticas fornecidas aos professores.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao explorar o estudo da sequência de Padovan, a pesquisa desenvolveu uma abordagem metodológica de forma exploratória, proporcionando uma análise e seleção dos objetos de aprendizagem disponíveis na comunidade GeoGebra.

A abordagem proposta da respectiva sequência destaca-se como um processo significativo, em que o modelo exploratório emerge como metodologia crucial para a sua transmissão, sendo eficaz como objeto de ensino. Essa evolução, centrada nas abordagens mencionadas, evidencia a adaptação e a contextualização desse conteúdo matemático para um contexto educacional mais amplo.

A construção e discussão deste trabalho nos mostra como determinadas ferramentas nos permite integrar conteúdos e ampliar as práticas pedagógicas. Além disso, reforçamos a necessidade de demonstrar matematicamente este assunto, tomando os devidos cuidados para que assuntos distintos da matemática de forma implícita no tema sejam interpretados corretamente. Assim, o uso do GeoGebra proporcionou subsídio algébrico, sendo uma abordagem diferenciada para a compreensão do tema.

Em direção ao futuro, a intenção é estender a aplicação para as aulas de Matemática das turmas dos anos finais do Ensino Médio, consolidando uma validação mais abrangente e promovendo discussões enriquecedoras sobre os resultados obtidos. Este enfoque metodológico visa contribuir significativamente para o campo educacional e aprimorar a compreensão da sequência de Padovan no contexto do estudo de sequências.

AGRADECIMENTOS

A parte de desenvolvimento de pesquisas no Brasil contou com o apoio financeiro do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq e da Fundação Cearense de Apoio ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico (Funcap).

A vertente de desenvolvimento da investigação em Portugal é financiada por Fundos Nacionais através da FCT - Fundação para a Ciência e Tecnologia. I. P, no âmbito do projeto UID / CED / 00194/2020.

REFERÊNCIAS

ALVES, F. R. V. Visualizing the Olympic Didactical Situation (ODS): Teaching Mathematics with support of GeoGebra software. **Acta Didactica Napocencia**, v. 12, n. 2, p. 97-116, 2019.

ALVES, F. R. V. Situações Didáticas Olímpicas (SDOs): ensino de olimpíadas de matemática com arrimo no software GeoGebra como recurso na visualização. **Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v. 13, n. 1, p. 319-349, 2020.

ALVES, F. R. V.; DIAS, M. A. Engenharia Didática para a Teoria do Resíduo: Análises Preliminares, Análise a Priori e Descrição de Situações-Problema. **Revista de Ensino, Educação e Ciências Humanas**, v. 10, n. 1, p. 2-14, 2019.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Ministério da Educação do Brasil, 2018. http://basenacionalcomum.mec.gov.br/

BOYER, C. B. **História da matemática**. 3ª ed. São Paulo: Editora Blücher, 2012.

ISBN: 978-65-5222-025-7

CRESWELL, J. W. **Research Design**: Qualitative, Quantitative, and Mixed Methods Approaches. SAGE Publications, 2013.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. 5ª ed. São Paulo: Unicamp, 2011.

FERREIRA, R. **Números mórficos**. 2015. 94 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática, Universidade Federal da Paraíba, 2015.

OLIVEIRA, R. R. de. **Engenharia Didática sobre o Modelo de Complexificação da Sequência Generalizada de Fibonacci: Relações Recorrentes N-dimensionais e Representações Polinomiais e Matriciais**. 2018. 94 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará, 2018.

SOKHUMA, K. Padovan Q-matrix and the generalized relations. **Applied Mathematical Sciences**, v. 7, n. 53, p. 2777-2780, 2013.

STEWART, I. **Tales of a neglected number**. Mathematical Recreations – Scientific American, v. 274, p. 102–103, 1996.

PADOVAN, R. **Dom Hans van der Laan: modern primitive**. [S. l.]: Amsterdam, Architecture and Natura Press, 1994.

RAMOS, M. G. O. **A Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro**. 2013. 113f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-graduação Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Estadual de Santa Cruz, 2013.

RUBIO-PIZZORNO, S. Impulsando la Educación Abierta en Latinoamérica desde la Comunidad GeoGebra Latinoamericana, **Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo**, v. 9, n. 1, p. 10-25, 2020.

SETTIMY, T. F. O.; BAIRRAL, M. A. Dificuldades envolvendo a visualização em geometria espacial. **Vidya**, v. 40, n. 1, p. 177-195, 2020.

VIEIRA, R. P. M. **Engenharia Didática (ED): o caso da Generalização e Complexificação da Sequência de Padovan ou Cordonnier**. 2020. 266 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará, 2020.

ISBN: 978-65-5222-025-7

VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C.; RODRIGUES, A. M. F. B. V. A construção da forma matricial de sequências lineares e recorrentes: Um estudo da matriz geradora. **Cadernos do IME**, n. 15, p. 167-180, 2020.