O PENTAGRAMA: UMA ILUSTRAÇÃO RACIONAL E MÍSTICA DA RAZÃO ÁUREA

Dayane Menezes da Silva (1); Franciiris Antonia de Souza (2); Francisco David Kélliton Alves Cruz (3)

Universidade do Estado do Rio Grande do Norte

reitoria@uern.br

Eixo Temático: História da Matemática e Cultura

Resumo do artigo: A razão áurea é uma constante real irracional denotada pela letra grega ϕ (*phi*). Poucos alunos certamente já tiveram contato com esse intrigante aspecto da realidade e da matemática, mas, na verdade, o número áureo tem muito a nos ensinar o que nos instigou a adotá-lo como objeto de nossa pesquisa que foi impulsionada pela questão "O que de matemático e místico pode se apreender do pentagrama, símbolo que contém em si a razão áurea?". Elaboramos o seguinte objetivo geral: analisar a razão áurea, no pentagrama, daí seu interesse pelos pitagóricos, que deverá ser alcançado levando-se em consideração os seguintes objetivos específicos: investigar, matematicamente, a razão áurea; mostrar a importância do pentagrama como símbolo religioso para Pitágoras e o pitagorismo. É uma pesquisa de cunho eminentemente bibliográfico, utilizando leituras, discussões, reflexões e fichamentos para nos aproximarmos melhor do assunto abordado. A razão áurea serve como exemplo para justificar, para atrair a atenção de alunos e professores ao estudo do conhecimento matemático, estimulando que outras pesquisas sobre essa temática sejam desenvolvidas a partir de uma diversidade de questionamentos.

Palavras-chave: Matemática; Pentagrama; Razão áurea; Pitagorismo.

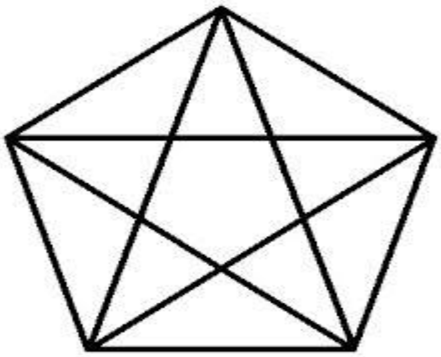
1 INTRODUÇÃO

O pensar sobre o mais irracional dos números que regula a estética e a natureza começou há cerca de 2.500 anos, com a preocupação de se encontrar a maneira mais harmoniosa e simétrica de dividir um segmento de reta em duas partes. Seria, por exemplo, pelo seu ponto médio? Uma das questões que certamente preocupou Euclides (330-275 a.C.), o matemático grego autor dos Elementos, obra fundamental da geometria.

Os resultados dessa misteriosa razão como verão futuramente em melhores detalhes é sempre 1,618034..., que ficou conhecido como razão áurea, proporção áurea, número de ouro, número áureo, secção áurea, proporção de ouro. É uma constante real algébrica irracional denotada pela letra grega φ (lê-se "fi"), haja vista ser frequentemente denominada de razão de Phidias em homenagem ao escultor Phideas, que a teria utilizado para conceber o Parthenon grego, e com o valor arredondado a três casas decimais de 1,618.

Já está demonstrado que $\boldsymbol{\varphi}$ é o mais mal-aproximado por frações dos números irracionais. O incrível é que a natureza usa justamente o mais irracional dos números irracionais para melhor realizar seus padrões. Esse número irracional $\boldsymbol{\varphi}$, símbolo da beleza, da harmonia, deve despertar a curiosidade de quem lida cotidianamente com o conhecimento matemático. A sua relação com o pentagrama (ver Figura 1), nos incita a conhecê-lo com mais profundidade, a estrela de cinco pontas, construída a partir das diagonais de um pentágono, figura geométrica que foi manuseada pelos povos antigos, venerada pelos pitagóricos e desde sempre estudada pelos matemáticos. Daí o nosso interesse por seu estudo, instigado pela questão "O que de matemático, de misterioso, de místico pode se apreender do pentagrama, símbolo considerado sagrado pela comunidade pitagórica, que contém em si a razão áurea?"

Figura 1: O pentagrama



Fonte: A autora

Para balizar nosso estudo e encontrarmos soluções para a indagação acima proposta, lançaremos mão dos seguintes objetivos:

Geral: analisar a razão áurea, a proporção divina, símbolo da harmonia, para muitos um número místico, no pentagrama, daí seu interesse pelos pitagóricos, uma comunidade de caráter religioso.

Específicos: investigar, matematicamente a razão áurea; mostrar a importância do pentagrama (por conter a razão divina) como símbolo religioso para Pitágoras e o pitagorismo, por isso o provável estudo dessa figura geométrica dentro dessa comunidade.

Trata-se de uma pesquisa bibliográfica e justificamos seu uso como base em Marconi e Lakatos (2010, p.166), que afirmam ser:

> A pesquisa bibliográfica, ou de fontes secundárias, [aquela que] abrange toda bibliografia já tornada pública em relação ao tema de estudo, desde publicações avulsas, boletins, jornais, revisas, livros, pesquisa, monografias, teses (...). Sua finalidade é colocar o pesquisador em contato direto com tudo o que foi escrito, dito ou filmado sobre determinado assunto, inclusive conferências seguidas de debates que tenham sido transcritos por alguma forma, quer publicadas quer gravadas.

Para Gil (2002, p.44),

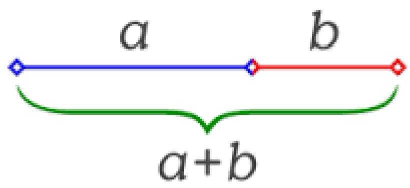
> A pesquisa bibliográfica é desenvolvida com base em material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos. Embora em quase todos os estudos seja exigido algum tipo de trabalho dessa natureza, há pesquisas desenvolvidas exclusivamente a partir de fontes bibliográficas.

Nossa pesquisa foi totalmente desenvolvida utilizando, para compreensão de nosso objeto de estudo e solução de nosso problema, fontes bibliográficas. Inicialmente consideramos possibilidades de leitura em diversas literaturas relativas ao assunto em estudo, como livros, revistas de artigos de cunho científico, textos publicados na internet. Foi feita uma seleção desse material preliminar que nos proporcionou a escolha dos textos mais adequados à nossa pesquisa e assim decidimos por procurar orientações teóricas em Lívio (2006), Fossa (2001) e Herz-Fischler (1987). Após essa fase, realizamos leituras sistemáticas objetivando tanto compreender de modo mais aprofundado nosso objeto de estudo quanto organizar essas leituras na forma de fichamentos de resumos, de citação, de bibliografia que nos seria útil quando da confecção de nosso trabalho.

2 UMA COMPREENSÃO MATEMÁTICA DA RAZÃO ÁUREA A PARTIR DA DEFINIÇÃO ALGEBRICA

A razão áurea pode ser definida algebricamente como (ver Figura 2):

Figura 2: Definição algébrica da razão áurea



Fonte: A autora

$$\frac{\mathbf{a+b}}{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} = \boldsymbol{\varphi} \qquad \text{(I)}$$

Se observarmos atentamente o membro direito da equação (I), veremos que $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} = \boldsymbol{\varphi} \implies \mathbf{a} = \mathbf{b}\boldsymbol{\varphi}$. Assim, substituindo o valor de **a** na equação (I), obteremos:

$$\frac{b\boldsymbol{\varphi} + \mathbf{b}}{b\boldsymbol{\varphi}} = \frac{\mathbf{b}\,\boldsymbol{\varphi}}{b}$$, que pode ser simplificada para a forma:

$$\frac{\boldsymbol{\varphi}+\mathbf{1}}{\boldsymbol{\varphi}} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} = \boldsymbol{\varphi} \qquad \text{(II)}$$

Multiplicando ambos os lados por φ em $\frac{\boldsymbol{\varphi}+\mathbf{1}}{\boldsymbol{\varphi}} = \boldsymbol{\varphi}$, resultará em

$\boldsymbol{\varphi} + \mathbf{1} = \boldsymbol{\varphi}^2$ (III).

Por fim, subtraindo $\boldsymbol{\varphi}^2$ de ambos os membros da equação (III) e multiplicando todos os elementos, à esquerda e à direita, por (-1), resulta a equação $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$, uma equação quadrática do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, onde, $a = 1$, $b = -1$ e $c = -1$. Utlizando Bháskara, para a incógnita $\boldsymbol{\varphi}$:

$$\varphi = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\varphi = \frac{-(-1) \mp \sqrt{(-1)^2 - 4\,.1\,.(-1)}}{2\,.1}$$

$$\varphi = \frac{1 \mp \sqrt{1+4}}{2}$$

$$\varphi = \frac{1 \mp \sqrt{5}}{2}$$

Para a equação inicial dada, $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$, sua única solução positiva será:

$\varphi = \frac{1 \mp \sqrt{5}}{2} \approx$ 1, 61803398875 ... que é o número φ.

3 O PENTAGRAMA A RAZÃO ÁUREA E MISTICISMO

O interesse pela Razão Áurea pode ter tido seu início, possivelmente, com o uso do pentagrama – ao estudo de sua geometria – que encontra-se relacionada à união das diagonais do pentágono. O pentagrama, segundo o Houaiss, é "uma figura mágica simbólica, semelhante a uma estrela de cinco pontas, formada por cinco letras ou sinais ligados por linha contínua, a que se atribuíam virtudes mágicas polígono estrela".

São dos matemáticos gregos, entretanto, os primeiros registros do estudo sobre a Razão Áurea, em cujo meio intelectual se insere Pitágoras, que fundou uma comunidade religiosa ao sul da Itália, em Crotona. Os pitagóricos pertencentes a essa seita muito provavelmente usaram a seção de ouro na construção da estrela pentagonal e adotaram o pentagrama como símbolo de sua irmandade: "ancient sources (...) specifically link the Pythagoreans to various mathematical concepts or objects related to DEMR[1] (HERZ-FISCHLER, p. 63, 1998).

Uma descoberta atribuída aos pitagóricos constitui-se num dos mais importantes achados matemáticos daquela época, e talvez de qualquer época: a das grandezas incomensuráveis. Conforme Lívio (2006), Kurt von Fritz, entre outros pesquisadores, sugere que os pitagóricos foram os primeiros a descobrir a Razão Áurea e a incomensurabilidade. Entre os pitagóricos, destacamos Hipaso de Metaponto, que utilizou o pentagrama e o pentágono, combinados com o conhecimento geométrico de meados do século V a.C., para descobrir a incomensurabilidade/irracionalidade. Mas essa foi uma conquista amarga, pois levantava dúvidas quanto à correção da tese pitagórica de que os números naturais e suas razões (frações de números naturais) eram os constituintes últimos da realidade, por isso a

[1] DEMR: Division in Extreme and Mean Ratio (a razão áurea).

descoberta da incomensurabilidade deveria ser mantida em segredo, mas, segundo a lenda, isso custou a vida do filósofo pitagórico supracitado que a divulgou. O pentagrama possui algumas propriedades interessantes. Seus segmentos estão na proporção áurea e essa figura é obtida traçando-se as diagonais de um pentágono regular. O pentágono menor, formado pelas interseções das diagonais, também está em proporção com o pentágono maior, de onde se originou o pentagrama. A razão entre as medidas dos lados dos dois pentágonos é igual ao quadrado da razão áurea. A razão entre as medidas das áreas dos dois pentágonos é igual a quarta potência da razão áurea.

Uma demonstração geométrica da incomensurabilidade/irracionalidade de $\boldsymbol{\alpha}$ pode ser feita utilizando o pentágono: traçam-se as diagonais do pentágono que, por sua vez, constituem um outro pentágono, cujas diagonais formam um outro pentagrama que contém em si outro pentágono e assim *ad infinitum*: "Pode-se repetir o processo um número infinito de vezes, obtendo pentágonos sempre menores. Isso implica que o lado e a diagonal do pentágono não têm uma medida comum, ou seja, são incomensuráveis" (FOSSA, 2007, p. 43).

Seja o pentágono (ver Figura 3) analizando os triângulos isósceles **AFG** e **AEF** que o consituem. Assim, teremos:

$$\frac{x}{x+y} = \frac{y}{x}$$

Fazendo meios pelos extremos na equação I, encontraremos:

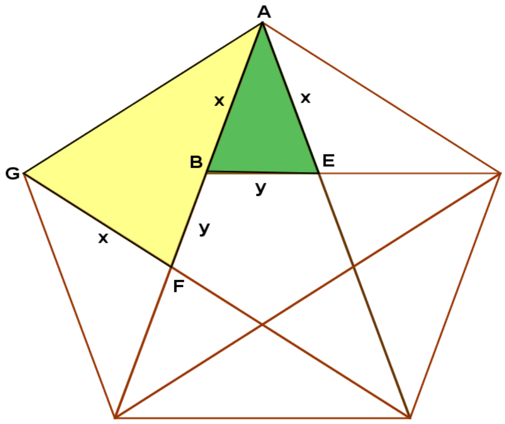
$$x^2 = xy + y^2$$

Dividindo ambos os membros da equação por y^2, teremos:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \frac{x}{y} - 1 = 0.$$

Seja $\frac{x}{y} = m$. Teremos $m^2 - m - 1 = 0$ que resultará em $m = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, a razão áurea.

Figura 3: O pentagrama e a razão áurea



Fonte A autora

O pentagrama é um verdadeiro mistério da matemática, contendo em si infinitos pentagramas, triângulo, retângulos, observando sempre as devidas proporções, constituindo a forma básica de muitas figuras geométricas. Repetimos: não era por acaso, que o Pentagrama era o símbolo da Escola Pitagórica.

O pentagrama, no decorrer da história da humanidade, serviu de símbolo da religiosidade cristã e, posteriormente, para a cultura neopagã este sempre foi objeto de vivo interesse. Quando Pitágoras/pitagóricos descobriram que as proporções no pentagrama expressavam a Razão Áurea, tomaram essa estrela como símbolo da Irmandade Pitagórica. Muito se especula se o pentagrama foi um importante emblema religioso, um talismã, para Pitágoras e os pitagóricos que a denominavam "saúde".

Como consequência dessa suposição, podemos conjecturar que eles conheciam a divisão de um segmento em média e extrema razão (razão áurea), pois o pentágono é construído de forma que as suas diagonais se subdividam na proporção áurea. Supostamente, por tais razões o pentagrama tornou-se o símbolo de reconhecimento entre os membros da escola.

Para Pitágoras, o pentagrama era o símbolo do himeneu celeste: a fusão da alma com o Espírito. Ele dava ao número cinco o nome de "número do homem no microcosmo". Diversas fontes antigas relacionam Pitágoras e os pitagóricos com o dodecaedro (um dos cinco poliedros regulares platônicos, ver Figura 4), por ser constituído por doze pentágonos, e com o pentagrama. Neste trabalho faremos referências apenas entre Pitágoras e os pitagóricos e o pentagrama.

Herz-Fischler utiliza dois importantes pensadores da Antiguidade para associar, misticamente, Pitágoras, pitagorismo e o pentagrama: Lucian e Aristófanes. Lucian (aprox. 120 – 180 a.C.) foi um escritor de textos em prosa. Nascido sírio, melhor que grego, tornou-se uma das mais importantes figuras literárias gregas de sua época. Escreveu em uma forma pura de linguagem literária do segundo século antes de Cristo. Lucian (*apud* HERZ-FISCHLER, 1998, p.65) faz uma relação pitagorismo/pentagrama/saúde: "Indeed the Pentagram, the triple intersecting traingle which they used as a symbol of their sect [literally, those of the same teaching], they called 'Health'" E, "'the pentagrama': because the [symbol] secretly called the pentalpha was a recognition-symbol amongst the Pythagoreans, and they used it in their letters" .

Aristófanes foi um dramaturgo da antiguidade grega, sendo considerado o maior representante da comédia antiga. Nasceu em Atenas e, embora sua vida seja pouco conhecida, sua obra permite deduzir que teve uma formação requintada. Esse grego viveu toda a sua juventude sob o esplendor do século de Péricles, mas também testemunhou o início do fim de Atenas. Ele viu o início da Guerra do Peloponeso, que arruinou a hélade. Escreveu a peça "As nuvens". Citado por Herz-Fischler (1998, p.65), novamente quando se quer associar itagorismo/pentagrama/misticismo: "And the triply self-entwined triangle, the pentagrama, which they employed as a sign amoing fellow members of their school, was named "health" by them" .

Figura 4: O dodecaedro platônico

Fonte: Disponível em:<www.eduardfis.wordpresss.com Acesso em: 06 jul. 2015

Um dos maiores, senão o maior, estudioso de Pitágoras e do pitagorismo foi o alemão Walter Burkert. Segundo ele, " the tradition about Hippasus, though surrounded by legend, makes sense ... The dodecahedron may well have been important as an a [symbol] in the Pythagorean school, like the pentagrama; Hippasus' offense was analysing the sacred object, publicly, by mathematical means” (BURKERT , 1972, p. 459).

Pelo exposto, não podemos deixar de considerar a relação entre matemática e misticismo, entre matemática e o sagrado. Pennick (1980, p. 45), na contracapa de sua obra “Geometria sagrada” nos induz à reflexão sobre essa associação ao afirmar que:

> Das galáxias às moléculas, a geometria sagrada tem sido o esteio de quase todas as coisas edificadas pela mão do homem. Em todas as ocasiões de criação de uma forma geométrica qualquer, a geometria manifestou-se como unidade de expressão universal. E tal unidade, desde os primórdios dos tempos históricos, tem-se revelado nas construções religiosas.

Matemática e sagrado podem ter afinidade, inclusive, por que não? O divino sendo considerado o grande matemático e arquiteto que inventou a natureza a partir desse conhecimento, como o defendiam Pitágoras e pitagorismo, para os quais a matemática, através dos números naturais e suas razões, seria o retorno da alma, para sempre, ao divino. Logo, muito mais que natural um interesse, além de matemático, também religioso, pela figura até então estudadas.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta pesquisa, nos propomos a estudar, nas dimensões matemática e religiosa do pentagrama. Entendemos ter sido uma pesquisa de significativa qualidade por nos havermos detido, por mais tempo, e com mais profundidade numa leitura diferenciada acerca dessa figura.

A primeira aprendizagem dessa empreitada é que todo, ou talvez os mais instigantes e atraentes, conteúdo matemático com o qual lidamos deve ser tratado de forma mais minuciosa, buscando entender melhor esse assunto, na sua essência, inclusive relacionando-a outros temas. Nunca devemos estudar determinados conhecimentos somente na sua superficialidade.

A segunda aprendizagem a destacar foi nossa capacidade de questionar. E, a terceira, integrar conhecimentos: “estabelecer conexões entre temas matemáticos de diferentes campos e entre esses temas e conhecimentos de outras áreas curriculares” (BRASIL, 1997).

Mesmo sendo objeto de interesse de estudiosos há mais de dois mil anos atrás, a discussão acerca da razão áurea continua bastante atual, e acreditamos tão cedo será esgotada, pois há muito ainda a ser desvendado. A razão áurea, por suas peculiaridades, matemáticas e não-matemáticas, serve como exemplo para justificar, para atrair a atenção de aluno(a)s e professor(a)s ao estudo do conhecimento matemático, para melhor discernimento de matemática e religiosidade, consequentemente compreender, epistemologicamente, tanto a matemática quanto a religião, estimulando que outras pesquisas sobre essas temáticas sejam desenvolvidas a partir de uma diversidade de questionamentos.

5 REFERÊNCIAS

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BURKERT, Walter. **Lore and Science in ancient pythagoreanism.** Cambridge: Harvard UNiversity Press, 1972.

FOSSA, John A. **Cabelos negros, olhos azuis e outras feições das matemáticas puras e aplicadas**. Natal: EDUFRN, 2007.
GIL, Antônio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002.

HERZ-FISCHLER, Roger. **A mathematical history of the golden number**. Waterloo: Wilfrid Laurier University Press, 1987.

LIVIO, Mário. Razão Áurea : história de $\boldsymbol{\varphi}$ um número surpreendente. Rio de Janeiro: Record, 2006.

MARCONI, Marina de Andrade e LAKATOS, Eva Maria. **Fundamentos de metodologia científica**. 7. ed. São Paulo: Atlas, 2010.

PENNICK, Nigel. **Geometria sagrada**: simbolismo e intenção nas estruturas religiosas. São Paulo: Pensamento, 1980.