O uso do Pensamento Matemático Avançado e de Tecnologias na Aprendizagem de Séries Infinitas

Daila Silva Seabra de Moura Fonseca[1]

Regina Helena de Oliveira Lino Franchi (Orientadora)[2]

Resumo

Este trabalho trata-se de um projeto de pesquisa, em elaboração, que busca verificar quais são algumas das possíveis contribuições que uma proposta pedagógica baseada na teoria do pensamento matemático avançado e no uso de tecnologias pode trazer para a aprendizagem de séries infinitas, mais especificamente o conceito de convergência, em uma turma do ensino superior. O público alvo são os alunos do segundo período de Engenharia de Produção de uma instituição federal da cidade de Congonhas. É uma pesquisa com abordagem qualitativa e teremos como instrumentos de coleta de dados: sondagem inicial sobre o conhecimento prévio dos alunos, aplicação de atividades que utilizem as tecnologias e observações ocorridas no campo da pesquisa.

Palavras-chave: Educação Matemática; Pensamento Matemático Avançado; Tecnologias; Convergência; Séries.

Introdução

O ensino de Cálculo tem sido foco de atenção dos que se debruçam sobre o estudo da educação superior devido ao grande número de reprovação e desistência dos alunos. Segundo Catapani (2001, p. 49) "ao invés de desempenhar importante papel no desenvolvimento da sociedade científica e tecnológica em que vivemos, o Cálculo tem-se colocado como barreira ao acesso profissional a muitos estudantes que conseguiram ingressar nas universidades". Apesar disso, não são muitas as pesquisas brasileiras sobre o tema, fato este constatado após busca realizada em um banco de resumos de teses e dissertações nacionais (CAPES[3]), em 28 de maio de 2010.

Entre os conteúdos de Cálculo, me interessei pelo tema "séries infinitas". Esse interesse tem origem na minha experiência pessoal como aluna, pela dificuldade que tive

[1] Aluna do Mestrado Profissional em Educação Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto.
E-mail: dailasmfonseca@yahoo.com.br

[2] Professora do Mestrado Profissional em Educação Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto.
E-mail: reginafranchi@uol.com.br

[3]Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior. A pesquisa foi feita utilizando as palavras "aprendizagem" e "séries", buscadas simultaneamente.

em aprender, e também como professora, pela dificuldade que tive em ensinar esse conteúdo.

A importância desse conteúdo, inserido nas disciplinas básicas de cursos superiores, tem sido destacada por diversos autores, pelas possibilidades que utilização desse conceito em diferentes contextos. James Stewart aponta que Newton se utilizava da representação de funções como somas de séries infinitas. Para encontrar áreas de regiões planas delimitadas por uma função, ele utilizava o recurso da integração da função, “expressando-a primeiro como uma série e então integrando cada termo da série.” (STEWART, 2009, p. 640).

Segundo Boyer (1996) o conceito de convergência de séries era utilizado por matemáticos em diferentes situações. Alguns desses exemplos são elencados a seguir: Arquimedes (287-212 a.C) discutiu a quadratura da parábola através da soma de uma progressão geométrica infinita; a área sob a curva $y = x^x$ de $x = 0$ a $x = 1$ foi determinada por Jean Bernoulli (1667-1748) através da série infinita $\frac{1}{1^1} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \cdots$; Leibniz (1646-1716) utilizou da série infinita $4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\right)$ para aproximar um valor para π; Isac Newton (1642-1727) por volta de 1665 começara a exprimir funções em termos de séries infinitas.

Vários são os argumentos sobre a utilidade das séries. Segundo Stewart,

> Muitas das funções que surgem em física-matemática e química, tais como funções de Bessel, são definidas como somas de séries, assim, é importante nos familiarizarmos com os conceitos básicos de convergência de sequências e séries infinitas. [...] Os físicos também usam séries de outra maneira [...] Em áreas de estudo tão diversas quanto ótica, relatividade especial e eletromagnetismo, eles analisam fenômenos trocando uma função pelos principais termos da série que a representa. (STEWART, 2009, p. 640).

Uma possível causa do não entendimento de séries numéricas seria a dificuldade de, intuitivamente, descobrir se uma série é ou não convergente. Dois exemplos para essa dificuldade seriam a série harmônica e a série geométrica de razão 1/2 . Aparentemente, os termos das duas séries apontadas como exemplo, têm a mesma propriedade de tenderem a zero. No entanto uma converge e a outra diverge. Isso não é aceito naturalmente e muitas vezes não é compreendido pelos estudantes.

Os critérios para convergência de séries em geral são decorados e aplicados sem nenhuma compreensão. Os estudantes aceitam que esses critérios podem garantir a convergência das séries, mas não entendem porque (e nem ao menos questionam isso). É possível que uma das causas da pouca compreensão seja a dificuldade dos alunos na transição do pensamento matemático elementar para o pensamento matemático avançado.[4]

O pensamento matemático avançado

É fato que muitos alunos que tinha facilidade com a Matemática em ensino fundamental e médio, passam a ter dificuldade ao ingressarem no ensino superior. Tall (1991, p.3) diz que muitas vezes, no ensino de matemática da graduação, é apresentada a forma final da teoria ao invés do aluno participar do ciclo de criação da mesma. Ele ainda cita Skemp (1971) dizendo que "as actuais abordagens ao ensino de graduação tendem a dar aos alunos o produto do pensamento matemático, em vez de o processo do pensamento matemático."

Para Dreyfus (1991, p. 25) o aluno deve construir as propriedades de um determinado conceito através de deduções que partem da definição. Os alunos podem envolver-se nessa construção através de atividades que promovam a abstração.

Segundo Tall (1991, p. 3) a possibilidade de definição formal e de dedução é um fator que diferencia o pensamento matemático avançado do pensamento matemático elementar. Para Dreyfus (1991, p. 26) uma característica distintiva entre esses dois tipos de pensamento está na complexidade a qual a matemática é tratada. Por meio de abstração e representação é possível passar de um nível para o outro.

O pensamento matemático avançado é conseguido através de uma grande variedade de processos que interagem entre si, como por exemplo, os processos de conjecturar, representar, visualizar, induzir, analisar, generalizar, sistematizar, abstrair e formalizar (DREYFUS, 1991, p. 30). Tall (1991) reconhece o pensamento matemático avançado em termos "de um processo criativo ao invés de apenas prova e dedução" (p. 23).

Tall (1991) nos explica que a passagem do pensamento matemático elementar para o pensamento matemático avançado, envolve a transição:

[4] Essa passagem será explicada no texto que se segue. O termo "Pensamento Matemático Avançado" é originado de "Advanced Mathematical Thinking", tendo David Tall como um dos principais pesquisadores.

> do descrever para o definir, do convencer para o provar de uma maneira lógica com base nas definições. [...] É a transição da *coerência*[5] da matemática elementar para a *conseqüência*[6] da matemática avançada, com base em entidades abstratas que o indivíduo precisa construir através de deduções das definições formais. (TALL, 1991, p. 20)[7]

Domingos (2001), em uma investigação teórica sobre o aprendizado de matemática, concluiu que

> há uma evidência bastante acentuada que suporta a importância de aprender com compreensão desde o início, por contraposição a uma aprendizagem que assenta na aquisição de determinadas habilidades isoladas para as quais só à posteriori é desenvolvida uma compreensão de como é que estas funcionam formando um todo. Quando os alunos aprendem com compreensão eles são capazes de aplicar esses conhecimentos para aprender novos tópicos e para resolver novos problemas. (DOMINGOS, 2001, p.113)

Tall (1991) explica que o ciclo completo para termos uma atividade para se pensar a matemática avançada, começa "pelo ato criativo de considerar um contexto problema em pesquisa Matemática que leva a formulação criativa de conjecturas para o estágio final de refinamento e prova" (p. 3). Tall destaca neste ciclo a necessidade de começar com conjecturas e debate, para construir significado, para refletir sobre definições formais, construir o objeto abstrato cujas propriedades são aquelas e só aquelas que podem ser deduzidas da definição.

Com base nisto, entendemos que acontece aprendizagem e construção de significados quando o aluno desenvolve o pensamento matemático avançado.

O uso das tecnologias

Segundo Kawasaki (2008) é comum encontrarmos em pesquisas que

> uma das principais vantagens, ao incorporar as tecnologias computacionais nos processos de ensinar/aprender matemática, é a possibilidade de visualizar e manipular as idéias matemáticas (objetos virtuais matemáticos). Tal possibilidade decorre do fato de alguns software (ou aplicativos) matemáticos serem capazes de transformar situações algébrico-simbólica em situações espaço-geométricas. Parece haver consenso entre educadores matemáticos sobre

[5] Grifo do autor.

[6] Grifo do autor.

[7] Tradução da autora.

> o valor pedagógico da *visualização*[8] no ensinar, no aprender e, até mesmo, no 'fazer' matemática. Dessa forma, recursos visuais (não necessariamente, os computacionais) sempre foram utilizados, por professores, para introduzir idéias matemáticas abstratas e complexas. No caso do ensino de Cálculo, alguns educadores exaltam, no uso do computador, a possibilidade de visualizar e alterar uma representação gráfica, simultânea e continuamente articulando-a, de forma dinâmica, a suas representações numérica e algébrica. (KAWASAKI, 2008, p. 43)

A mesma autora, ainda nos conscientiza de que ao utilizarmos o computador é possível admitir que a matemática esteja sendo produzida de uma maneira diferenciada à matemática produzida através da utilização do lápis-e-papel. Pois, em geral, as propostas educacionais para a construção da matemática por meio do uso do computador "não assumem a idéia tradicional de uma matemática 'pronta' ou 'acabada' a ser ensinada, mas admitem também a possibilidade de se 'fazer' matemática em uma atividade de aprendizagem" (KAWASAKI, 2008, p. 49).

O ambiente informatizado é um possível local para o desenvolvimento de atividades que visam passar pelo ciclo do pensamento matemático avançado. Pois muitas pesquisas indicam que o uso de tecnologias é um meio favorável ao aluno desenvolver hipóteses e/ou conjecturas. Conforme nos diz Franchi (2007):

> A Informática facilita as visualizações, possibilita testar mudanças relacionadas a características algébricas de conceitos matemáticos e observar as variações resultantes no aspecto gráfico. A comparação entre as representações gráficas, algébricas e numéricas, a observação e a reflexão sobre o observado podem levar à elaboração de conjecturas. Borba e Penteado (2001, p.39) afirmam que as conjecturas surgem com freqüência em aulas utilizando tecnologias como o computador ou as calculadoras e que, se debatidas com a classe, podem levar a descobertas. (FRANCHI, 2007)

Kawasaki (2008) utiliza o pesquisador Tikhomirov (1981), para explicar que a atividade humana, quando mediada pelo computador, "altera de forma qualitativa a estrutura da atividade intelectual humana, reorganizando a memória, as formas com que passamos a armazenar a informação e com que organizamos a sua busca" (p. 48).

Portanto estamos interessadas em desenvolver atividades para serem realizadas em um ambiente informatizado, de forma que os alunos possam investigar as variadas possibilidades de desenvolvimento das atividades, discutam entre eles essas resoluções, investiguem, conjecturem e possam, através de um trabalho conjunto entre teoria e recursos computacionais, chegar à prova dessas conjecturas.

---

[8] Grifo da autora.

Desenvolvendo a pesquisa

A pesquisa tem por objetivo principal verificar quais são as possíveis contribuições que uma proposta pedagógica baseada na teoria do pensamento matemático avançado e no uso de tecnologias pode trazer para a aprendizagem de séries infinitas (especialmente o conceito de convergência) em uma turma do ensino superior.

Os objetivos específicos são:

- Investigar as possibilidades de utilização de tecnologias na educação matemática em nível superior.
- Investigar as possibilidades de utilização das teorias do pensamento matemático avançado na educação matemática em nível superior.
- Investigar as características e potencialidades de ambientes informatizados com vista à construção de conhecimento matemático avançado.
- Elaborar, implementar e avaliar uma proposta pedagógica, sobre séries infinitas, baseada no pensamento matemático avançado e no uso de tecnologias em uma turma de Cálculo II.
- Discutir, do ponto de vista teórico da pesquisa em Educação Matemática, a construção de significados e transição do pensamento elementar para o pensamento matemático avançado relativo aos conteúdos de séries infinitas, em ambientes informatizados, com base nas atividades implementadas.

Será feita uma sondagem dos conhecimentos prévios dos alunos a respeito de séries infinitas e convergência através *instrumento de coleta de informações.*[9]

Em seguida serão aplicadas atividades que têm por objetivos desenvolver o pensamento matemático avançado, passando pelo ciclo de desenvolvimento, definido anteriormente pro Tall (1991). As atividades explorarão conceitos como: séries numéricas infinitas, convergência de séries, representação de funções por séries e potências, critérios e intervalos de convergência.

---

[9] Chamamos de *instrumento de coleta de informações*, um utensílio composto de questionário e questões matemáticas para serem resolvidas de maneira explicativa. Tal instrumento não será considerado um processo avaliativo.

A pesquisa de campo será iniciada no 2º semestre do ano corrente, sendo que a coleta dos dados será feita pelo *instrumento de coleta de informações*, um *software* que capture o que está sendo desenvolvido pelos alunos (ou seja, que capture a tela do computador) e gravador de voz para a captura do áudio durante as atividades no laboratório. Além disso, também haverá um caderno de registro para anotações do comportamento dos alunos durante as atividades e para considerações da pesquisadora.

A análise dos dados será feita através da metodologia qualitativa confrontando os dados obtidos com o referencial teórico.

Referências

BOYER, Carl B. *História da Matemática.* 2ª ed. São Paulo: Blücher, 1996.

CATAPANI, Elaine Cristiana. *Cálculo em serviço:* um estudo exploratório. São Paulo: Bolema/Unesp, 2001, ano 14, nº 16. p.48-62.

DREYFUS, T. Advanced Mathematical Thinking Processes. In: TALL. D. O. (Ed) *Advanced Mathematical Thinking*. Londres: Kluwer Academic Publisher, 1991.

DOMINGOS, António. Contextos escolares que favorecem o pensamento matemático avançado. In: MOREIRA, D. e outros. *Matemática e comunidades: A diversidade social no ensino-aprendizagem da matemática.* Anais (Encontro de Investigação em Educação Matemática da SPCE), Consolação: SEM-SPCE, 2001. p.s 113 – 122. Disponível em: <http://www.spce.org.pt/sem/encontros/encontro2001.htm>. Acessado em: 12 de janeiro de 2011.

FRANCHI, R. H. O. L. Ambientes de aprendizagem fundamentados na Modelagem Matemática e Informática como possibilidades para a Educação Matemática. In: BARBOSA, J. C.,CALDEIRA, A. D., ARAÚJO, J L.(orgs) *Modelagem Matemática na educação matemática Brasileira: pesquisas e práticas educacionais***.** Recife: SBEM, 2007.

KAWASAKI, T. F. *Tecnologias na sala de aula de matemática:* resistência e mudanças na formação continuada de professores. (Tese) Belo Horizonte: UFMG, 2008.

STEWART, James. *Cálculo.* Antonio Carlos Moretti (trad.). v.2., 6 ª ed. São Paulo: Cengage Learning, 2009.

TALL, D. O. The Psychology of Advanced Mathematical Thinking. In: TALL. D. O. (Ed) *Advanced Mathematical Thinking*. Londres: Kluwer Academic Publisher, 1991.