

ERROS RELATIVOS AO ESTUDO DE LIMITES E CONTINUIDADE:

Olhares sobre as autoanálises discentes ancorados em teorias didáticas

Homero Rodrigues ¹
Celso Eduardo Brito ²

RESUMO

O presente artigo destaca uma proposta metodológica cujo objetivo é analisar os erros enfrentados pelos discentes de Cálculo Diferencial e Integral I, nos períodos letivos de 2017, 2018 e 2019, nos cursos de Licenciatura em Matemática e Engenharia Civil, do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia – IFBA, Campus Eunápolis, frente ao objeto do saber Limites. Esse processo se dará mediante investigações das autoanálises dos erros, elaboradas pelos próprios estudantes. Como alicerce teórico, essa pesquisa se sustenta nas teorias em Didática da Matemática, Antropológica do Didático que tem como autor Yves Chevallard (1980) e a dos Registros de Representações Semióticas (TRRS) estabelecida por Raymond Duval (1999). Os objetos matemáticos nos quais focamos essa investigação são particularmente, limites laterais e continuidade de funções reais. Os documentos investigados e analisados possibilitaram a compreensão de forma quanti-qualitativa, dos erros mais comuns apresentados durante as execuções de tarefas pelos discentes, que impossibilitam a aprendizagem concisa da disciplina ligada à Matemática. Com isso, pudemos observar as contribuições adquiridas para os processos de ensino e de aprendizagem, advindas dessa aplicação metodológica de forma institucional, podendo ser expandida para outros ambientes externos.

Palavras-chave: Limites, Cálculo Diferencial, Erros, Registros Semióticos.

INTRODUÇÃO

Ao se analisar e investigar o processo de certos estudantes no decorrer de sua carreira estudantil, do Ensino Básico ao Ensino Superior, temos que erros, entraves e dificuldades no aprendizado são evidentes e infelizmente constantes.

Nesse processo de barreiras do estudante referente a conhecimentos da Educação Básica precisam ser combatidos e sanados, caso contrário, se tornam futuramente erros por conhecimentos prévios cometidos em outros objetos, logo podendo-se formar uma “bola de neve”, na vida do discente, volvendo seu desenvolvimento cada vez mais lento e com enormes bloqueios.

¹ Graduando do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal da Bahia - IFBA, homero.ifba@email.com;

² Professor orientador: Doutor, Faculdade Ciências - UF, orientador@email.com

No ensino da Matemática, em qualquer nível educacional, esse desequilíbrio é comum, pois diversos fatores contribuem para que isso ocorra, como aquisições de novos saberes mais complexos que os anteriores, encarados pelos discentes, adequações as novas posturas dos docentes, enfrentando diversas rupturas nos contratos didáticos a que estão acostumados, falta de conhecimentos prévios necessários à aquisição dos novos saberes, dentre outros que podem não corroborar positivamente para o processo de ensino e principalmente da aprendizagem.

Sobre tal superação, a importância da atenção do docente como também do reconhecimento do discente, referentes a tais lacunas, devem caminhar juntas, assim com um processo para que elas sejam preenchidas. “A superação desse momento de desequilíbrio, para um novo estágio de equilíbrio, significa que houve uma reorganização dos conhecimentos em que as novas aquisições foram integradas ao saber antigo” (ALMOULOU, 2007).

Analisando e investigando tal processo dos discentes, com base em uma pesquisa quanti-qualitativa, à luz das teorias em Didática da Matemática, especificamente as Teorias Antropológica do Didático – TAD e dos Registros de Representação Semióticas – TRRS, foram feitos levantamentos dos erros cometidos pelos discentes, de acordo com o objeto de Limites e Derivadas, como também foi analisado em suas autoanálises seus posicionamentos referentes a tais erros.

METODOLOGIA

O preparo e a orientação para o início das investigações e pesquisas das avaliações e autoanálises dos estudantes dos cursos de Engenharia Civil e Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia – IFBA, Campus Eunápolis, das turmas 2017, 2018 e 2019, da teoria Cálculo Diferencial e Integral I, está atrelada ao projeto de Iniciação a Pesquisa, com apoio a Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado da Bahia (FAPESB) e do IFBA.

Os encontros para discussões e análises dos materiais, foram realizados através da plataforma online *MEETS*, como também presenciais no próprio instituto, mediadas pelo orientador. Essas discussões foram baseadas nas abordagens das teorias, nas aplicações e análises do objeto matemático estudado e investigado.

Segundo os dados obtidos pela pesquisa, foram 120 discentes de Engenharia Civil do componente curricular das três turmas, e do curso de Licenciatura em Matemática, 90



estudantes, ou seja, tendo o total de 210 alunos. A teoria em questão é sobre Aplicações de limites, particularmente Limites e Continuidade.

As autoanálises, os discentes destacam seu desenvolvimento na avaliação, acertos e pontuando seus erros e falhas no decorrer da parcial, assim justificando-as a causa de tais erros, se por falta de atenção, conhecimentos atuais, prévios ou outros tipos, sendo cada um atrelado a um Registro Semiótico, de acordo com a TRRS.

Além das parciais, também foram aplicadas as autoanálises aos estudantes, visando que eles discorrem sobre as tarefas aplicadas de forma minuciosa. Desde da abordagem referentes aos objetos aplicados, os erros cometidos, como também o estado emocional e físico dos próprios discentes.

Sendo assim, toda a investigação e pesquisa foram em cima das avaliações, juntamente na análise das autoanálises dos estudantes, todo esse processo sustentado pelas teorias da TAD e TRRS, que será discorrida em seguida.

REFERENCIAL TEÓRICO

Destacamos agora o nosso quadro teórico, no qual abordamos acerca das teorias em didática que foram exploradas na pesquisa. Evidenciaremos neste momento sobre a Teoria Antropológica do Didático (TAD) que tem por autor Yves Chevallard (1980) e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) proposta por Duval (1999), claro, é importante abordar os conceitos dessas Teorias para um melhor entendimento ao analisar os tipos de erros cometidos quando indicados as características das Funções Reais abordadas e claro, incluindo seus registros gráficos.

Teoria Antropológica do Didático (TAD)

A Teoria Antropológica do Didático, contribui de grande forma na matemática didática, assim, além de inseri-la no campo da antropologia, focaliza o estudo das organizações visando o ensino para o aprendizado de suas organizações. Em outros conceitos, a teoria segundo Chevallard diz, que ela estuda o homem perante o saber matemático e com ênfase em suas situações. E pelo termo “antropologia”, a TAD situa a sua atividade, dentro do conjunto de atividades humanas e também de instituições sociais.

E nesse processo de ensino e de aprendizado há três pilares de natureza epistemológica, sendo eles que a Matemática é uma essência dos fenômenos didáticos, ela também leva ao desejo de elaborar uma ciência da educação nela mesma, assim levando a modelos teóricos utilizados, e a última é que os conhecimentos matemáticos só podem ser compreendidos e apreendidos por meio de atividades e problemas que podem ser resolvidos pela mobilização desses conhecimentos.

Na TAD, a modelagem das práticas sociais, técnicas, tarefas, teoria e tecnológicas, permitem a atividade matemática, se dividindo em alguns postulados, como que toda prática institucional pode ser analisada sob diferentes pontos de vistas e diferentes maneira, pode também ter o cumprimento de toda tarefa onde decorre o desenvolvimento de uma técnica, discorrendo detalhadamente sobre a definição da praxeologia, cada uma dessas práticas, temos:

- Tarefa - amplia o aspecto corrente porque se sustenta no princípio antropológico e faz parte da raiz da noção de praxeologia. Nela encontram-se dois conceitos tarefa (t) e tipos de tarefas(T). Precisamos clarificar o seguinte: uma tarefa não é mais do que uma proposição exposta para ser resolvida; o Tipo de tarefa associado reflete o que se quer resolver dentro da tarefa. Desse modo a um tipo de tarefa existe a tarefa associada e, em geral, tipos de tarefas (T) e tarefas (t).

- Técnica - Para realizar um tipo de tarefa T requerem-se uma maneira de fazê-lo, procedimentos que devemos seguir para saber a resposta, desse modo, evoca-se o conceito de técnica (τ). Etimologicamente, a palavra técnica deriva do grego (tekhnê, saber-fazer). O tipo de tarefa T e a técnica constituem desse modo, um bloco designado por prático-técnico (práxis). Esse bloco identifica-se comumente por um saber-fazer: um determinado tipo de tarefa e uma determinada maneira de realizar tarefas deste tipo

- Tecnologia - denotada por θ , é um discurso racional (o logos) tendo por objetivo justificar a técnica, garantindo que ela permita realizar os exercícios do tipo T. Uma segunda função da tecnologia é a de explicar, tornar compreensível a τ .

- Teoria - Em grego o termo teoria (θεωρία) (theôria), na sua origem significava simplesmente a observação dum espetáculo- o theôros era o espectador que assistia a ação sem participar. Daí que os enunciados teóricos aparecem de forma abstrata, distantes das preocupações dos simples tecnólogos e técnicos. Este efeito de abstração está correlacionado com o que fundamenta a generalidade das demonstrações teóricas: sua capacidade para justificar, explicar e produzir. Agora falaremos sobre o segundo referencial teórico em que foi abarcado a pesquisa presente.

Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS)

Ao se deparar com uma representação, segundo Durval, é um sistema semiótico que tem funções fundamentais no funcionamento consciente. Assim os registros se diferenciam dos códigos. O primeiro mais eficiente e detalhado, e assim traz as conversões de registros matemáticos, tais como os gráficos, a geometria, álgebra e outros.

Toda conversão tem um sentido, tem um porquê, assim sempre indicando com registros que conversão está sendo feita, pois ela também pode ser a inversa. Também não se deve confundir o conteúdo representado com o objeto, assim mudando o conteúdo e não só a forma.

Há várias formas de conversão de registros os representando, sendo em tabelas como também em gráficos, outros como análises discorridas em tal registro, logo ele poderá ser uma representação/sistema semiótico que tem uma maneira específica e típica de representar um objeto matemático, assim também como tendo um ponto de vista específico, onde cabe-se na forma de definir ou caracterizar um objeto matemático e/ou suas propriedades.

Deste modo, uma mudança de registro mostra as vantagens no que tange o tratamento podendo facilitar uma melhor compreensão no processo de aprendizagem. Logo o autor nos traz as definições de tratamento e conversão como necessidade de distinguir esses dois tipos de transformação das representações aos quais há transformação de representações semióticas:

Um tratamento é a transformação de uma representação em uma outra do mesmo registro, isto é, uma transformação estritamente interna a um registro. Existem tratamentos que são específicos a cada registro e que não precisam de nenhuma contribuição externa para serem feitos ou justificados. Uma conversão é a transformação de uma representação de um registro D em uma outra representação de um registro A, conservando, pelo menos, a referência ao mesmo objeto ou à mesma situação representada, mas mudando, de fato, o conteúdo da representação (DUVAL, 1999, p.30).

Concluindo sobre a análise de uma situação em termos de registros de representação semiótica, Duval nos diz que seu objetivo “é determinar o funcionamento representacional próprio de um registro e, por consequência, determinar unidades significantes de uma representação desse registro”, (DUVAL, 1999, p.75) ou seja, não se pode focar exclusivamente

nas representações, pois nem todas as representações são necessariamente pertinentes, por outro lado, o que é pertinente nem sempre é percebido e absorvido pelos envolvidos em questão.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Destacando um apanhado geral das duas avaliações em cada turma, Engenharia Civil e Licenciatura em Matemática, abordando o objeto matemático Limites e Continuidade, foram no total cerca de 528 erros investigados, cometidos por 120 discentes e discorridos em suas autoanálises.

Dentre esses erros, discorreremos sua distribuição referente as suas classificações e de acordo com os registros semióticos, logo em seguida abordaremos os principais erros efetuados pelas turmas, observe a **Figura 1**.

Figura 1: Classificação dos erros dos estudantes



Fonte: Dados da Pesquisa

Podemos observar o destaque dos erros em relação a falta de atenção (39%) logo em seguida classificados como conhecimentos atuais (30%), conhecimentos prévios (23,1%) e por último, outros tipos de erros (7,9%).

Vale salientar que esses outros tipos de erros, são abordados pelos estudantes em sua maioria, pela falta de tempo, seja por chegar atrasado, “perder” muito tempo em uma tarefa e até mesmo se embolar em alguma resolução. Observe agora a distribuição dos erros em seus registros semióticos, como mostra a **Figura 2**.

Figura 2: Distribuição dos erros nos registros semióticos



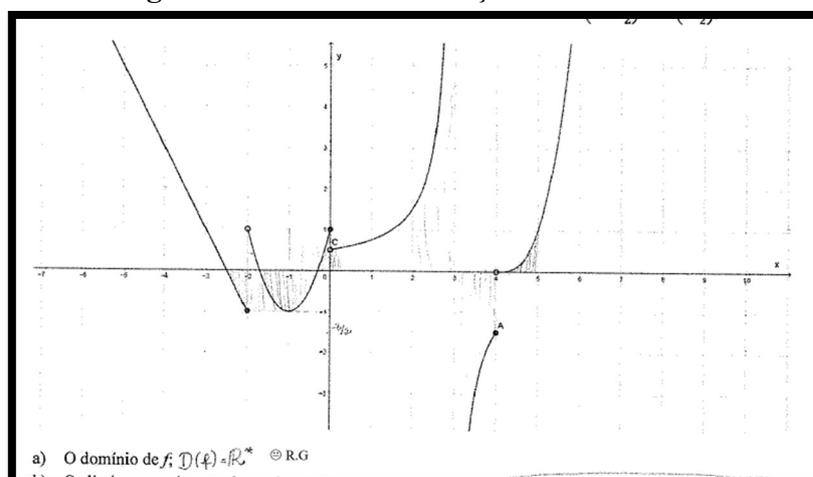
Fonte: Dados da Pesquisa

Com cerca de 33,33% dos erros destinados ao Registro Algébrico (RA), foi o registro de relevância, sendo justificado justamente pela abordagem do objeto matemático, trazendo uma necessidade na manipulação algébrica na grande maioria das resoluções.

Já o Registro Gráfico (RG), foi aproximadamente 28,40%, por conta da aplicação da técnica da análise gráfica, referente ao aplicado. Logo em seguida vem o registro numérico com 23,1% dos erros, em sua predominância atrelados por falta de atenção, que logo mais abordaremos, e por fim com 15,17%, atrelado ao registro da língua materna, em sua maioria pela fragilidade de interpretação dos enunciados das tarefas.

Observe agora a **Figura 3**, a resolução do Estudante A em uma tarefa que pede o domínio de uma função f .

Figura 3: Recorte da avaliação do Estudante A



Fonte: Avaliação do Estudante A

Análise a subtarefa indicada pelo item **a**, o discente destaca que o domínio da função é dada por $D(f) = \mathbb{R}^*$, mostrando que zero não pertence ao domínio de f . Porém ao analisar o gráfico da tarefa, podemos observar que apesar do ponto C está vazado, ou seja, não pertence, logo acima é mostrado que quando $x = 0, y = 1$.

O discente destaca como um erro no registro gráfico atrelado aos conhecimentos prévios, pois ele possui uma dificuldade na leitura de gráficos, como mostra a **Figura 4**, um recorte da autoanálise do Estudante **A**.

Figura 4: Recorte da Autoanálise do Estudante **A**

propostos. Entretanto, como pode ser verificado na **Figura 1**, cometi erro no *Registro Gráfico*, ao não determinar corretamente o domínio da função representada, equívoco que considero como falta de conhecimentos *prévios*, uma vez que não tenho prática com leitura e representações de conjuntos.

Fonte: Autoanálise do Estudante **A**

Outra falha que foi bem comum nas turmas, agora no registro algébrico, é em relação a representação algébrica do limite, como mostra a **Figura 5**, um recorte da avaliação do Estudante **B**.

Figura 5: Recorte da avaliação do Estudante **B**

$\lim_{x \rightarrow -1} \exists$, pois $\lim_{x \rightarrow -1^-} 2$ e $\lim_{x \rightarrow -1^+} 1$
LM


Fonte: Avaliação do Estudante **B**

Ao invés justificar o porquê que o limite quando tendia para -1, não existe, ele discorreu como $\lim_{x \rightarrow -1^-} 2$ e $\lim_{x \rightarrow -1^+} 1$. Em relação aos limites laterais, está correto, porém a notação de limites não, o correto deveria ser $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 2$, assim como $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 0$, e não igual a 1.

Então destacamos dois erros do discente, um em relação a notação de limites, e outro em relação ao ponto do limite quando tendia a -1 pela direita. O Estudante **B** destaca sobre em sua autoanálise, como mostra a **Figura 6**.

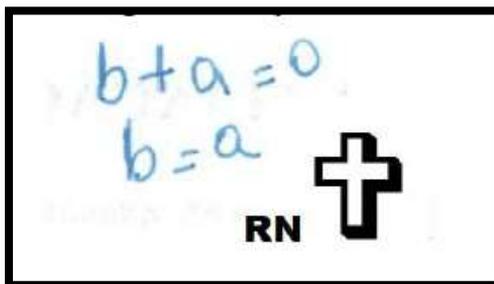
Figura 6: Recorte da Autoanálise do Estudante B

Questão 1, nesta tarefa denota para observar o gráfico da função real f , no qual utilizei a técnica da leitura matemática para registrar algebricamente suas competências, entretanto, errei em registro atuais e língua materna como mostra a **Figura 1**, pois na verdade o $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \exists$, pois $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 2$ e $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 0$. Além disso, esqueci de colocar $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 0$ a simbologia da $f(x)$.

Fonte: Autoanálise do Estudante B

Agora uma falha por falta de atenção, também no registro algébrico, foi cometido pelo Estudante C, como mostra a **Figura 7**, e logo depois na **Figura 8** um recorte de sua autoanálise discorrendo sobre seu erro.

Figura 7: Recorte da avaliação do Estudante C



$b + a = 0$
 $b = a$
RN +

Fonte: Avaliação do Estudante C

Figura 8: Recorte da autoanálise do Estudante C

Adicionalmente, na mesma tarefa, errei em registro numérico e atenção, pois não inverti sua operação, ou seja, não mudei o sinal, como indica a **Figura 3**.

Fonte: Autoanálise do Estudante C

Temos dois equívocos que o discente cometeu, o primeiro obviamente está na manipulação da equação dada por $b + a = 0 \Rightarrow b = -a$, porém o estudante por falta de atenção, como ele justifica em sua autoanálise, esqueceu de inverter o sinal do termo a . Porém ele classifica como erro no registro numérico, e que no caso a manipulação está referente ao termo algébrico a , então o registro semiótico atrelado é o algébrico.

Foi algo comum entre as turmas, a classificação dos registros semióticos de forma errônea, manipulações no registro numérico sendo classificados no registro algébrico, tratamento da língua materna de forma incorreta, sendo justificadas pela representação gráfica.



Um entendimento dos registros semióticos auxilia na própria análise do estudante, entendendo seus principais erros e fragilidades, para que então saiba onde tratar e o que revisar para sanar tais dúvidas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

De acordo com os dados levantados, investigados e analisados, observamos em específico aos tipos de erros destinados pela falta de atenção, causada ou pela pressa, nervosismo, e até mesmo um estado físico/emocional afetado nos momentos das parciais. Logo, antes da entrega de tais parciais, uma análise e leitura rápida como um ato de conferir no desenvolvimento, evitaria vários erros cometidos por tal classificação, seja em qual registro for, inclusive o último exemplo que foi abordado.

Sobre os conhecimentos atuais, foi destacado a fragilidade da absorção dos discentes referente ao objeto aplicado, e isso é preocupante, pois se não forem sanados e trabalhados isso neles, os erros referentes aos conhecimentos atuais podem se tornar futuramente erros nos conhecimentos prévios, gerando entraves em futuros objetos estudados e assim acumulando tais entraves na vida do discente.

E falando justamente sobre ele, a maioria dos erros de conhecimentos prévios, como foram analisados, são provenientes de objetos da educação básica, ou seja, entraves que não foram sanados, assim sendo carregados até o ensino superior, logo gerando outros entraves em vários objetos diferentes. Sendo algo que se deve atenção, tanto do discente como do docente, em não deixar uma lacuna em seu domínio em tal aplicação, mas sim saná-las, preenche-las para que esses entraves não atrapalhem no seu desenvolvimento.

Assim como todos os outros registros, a falta de coordenação foi um dos principais motivos de tantos erros. Sendo que como foi abordado, um conhecimento em um registro pode auxiliar em seu tratamento e coordenação para representar em outro registro, logo muitos erros como representados no registro algébrico foram cometidos por uma má interpretação do registro da língua materna, ou até mesmo um tratamento errôneo no registro gráfico.

A coordenação possibilita o estudante, por exemplo, que tenha uma dificuldade na representação no registro algébrico, dependendo da aplicação do objeto, representa-lo no registro gráfico, e vice versa, assim com todos os outros registros, um auxiliando o outro e até mesmo um corrigindo o outro.

REFERÊNCIAS

BRITO, Celso Eduardo. **ESTUDO DO CENTRO DE MASSA EM CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL: Uma abordagem Didática envolvendo recursos tecnológicos.** Universidade Federal da Bahia, 2019.

DENARDI, Vânia Bolzan. **Teoria dos Registros de Representação Semiótica: Contribuições para a Formação de Professores de Matemática.** Revista EBRAPEM, Rio Grande do Sul, 2017.

DUVAL, R. **Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée.** Annales de didactique et de sciences cognitives. IREM de Strasbourg, v. 5, p. 35-65, 1993;

SANTOS, M. C. ; MENEZES, M. B. . **A Teoria Antropológica do Didático: uma Releitura sobre a Teoria.** Perspectivas da Educação Matemática, v. 1, p. 648-670, 2015.