DIFICULDADES NA RESOLUÇÃO DE INEQUAÇÕES RACIONAIS FRACIONÁRIAS: UM ESTUDO DE CASO NAS ESCOLAS DE MOÇAMBIQUE

António Fernando Zucula[1]

1.Doutorando em Educação no Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade do Estado do Rio de Janeiro/ProPEd/UERJ.zucula_antonio@yahoo.com.br ou anzucula@gmail.com

RESUMO

Este artigo apresenta as análises da investigação que realizamos sobre as dificuldades de aprendizagem apresentadas pelos alunos da 11ª classe na escola secundária Quisse Mavota, cidade de Maputo, República de Moçambique no ano de 2012. O artigo é um recorte da dissertação de mestrado, onde descreve dificuldades, erros e concepções alternativas apresentadas pelos alunos na resolução de inequações racionais fracionárias. Para tanto, guiamo-nos pelos princípios da pesquisa qualitativa, sendo que para a análise de resultados usamos como referencial teórico o quadro de Douady (1986). Das análises concluímos que, em relação aos recursos empregues constatamos a maior tendência foi do emprego da representação algébrica, tendo-se observado alguma interação entre representações dependendo da inequação proposta. Verificamos que os tipos de erros, também, dependem da inequação proposta, uma vez que os mais frequentes foram: "multiplicar ou dividir por fatores que não são necessariamente positivos" e "dedução incorreta de sinais de fatores a partir do sinal do produto/quociente". É provável que este quadro seja decorrente do processo ensino-aprendizagem das inequações, o qual se julgou ter privilegiado técnicas em vez de conceitos e propriedades matemáticas.

Palavras-chave: Inequações racionais fracionárias, análise, dificuldades, concepções e representações.

INTRODUÇÃO

A Matemática lecionada na escola implica, sobretudo, desenvolver o pensamento matemático e habilidades do aluno. Estes dois itens são necessários para a compreensão de diferentes situações, incluindo aquelas do cotidiano e, também, serve de ferramenta a outros campos de conhecimento. Analisando esta situação, a partir da política educacional moçambicana, compreendendo que a educação é a chave para o desenvolvimento econômico, sociocultural e político de um País. Notamos certas lacunas nos alunos e nos professores na interpretação e resolução de conceitos matemáticos, no geral, e, em particular, nos métodos e técnicas de resolução das equações e inequações, principalmente, no 2º ciclo, no que diz respeito à resolução de inequações racionais fracionárias.

Segundo a literatura, os estudantes mostram, em geral, grandes dificuldades na resolução de inequações desde os primeiros anos da escola secundária até à universidade, Costa (1998). Na sua resolução, aplicam um processo puramente algébrico e, muitas vezes, resolvem-nas como se de equações se tratassem, pois, o fazem substituindo apenas o sinal de igualdade pelo sinal de desigualdade, o que parece ilustrar uma transferência mecânica de procedimentos, Huillet (1996).

Este estudo tem como suporte a Educação Algébrica, pois além de se tratar de um tema presente no quotidiano escolar, já que é parte integrante dos Programas Curriculares do Ensino Básico e do Ensino Secundário Geral, também, tem sido objeto de discussão, estudos e análise por parte de muitos professores e por alguns pesquisadores um pouco por todo o mundo. Em Moçambique, estudos do gênero também têm sido realizados, particularmente, por Huillet (1996), Costa (1998) e Monjane (2001). Podemos justificar, dessa maneira, a relevância de enfatizar esse recorte em nossa pesquisa tendo as seguintes questões norteadoras: Que tipo de dificuldades, erros e concepções alternativas apresentam os alunos da 11ª classe na resolução de inequações racionais fracionárias? Qual é a forma de representação que induz ao erro ou facilita a resolução correta de cada tipo de inequação racional fracionária?

Quando os alunos terminam o ensino médio, tem-se a expectativa de que eles tenham desenvolvido suas capacidades de pensar e aplicar raciocínios numéricos, espaciais, algébricos, lógicos, gráficos e estatísticos. Essa capacidade desenvolve-se ao longo do tempo e relaciona-se diretamente às experiências pelas quais eles irão passar e aos diversos tipos de pensamento que estão associados aos diferentes campos da Matemática, que deverão ser trabalhados de forma integrada e organizados num grau crescente de complexidade.

Com relação à álgebra predomina, ainda, uma visão tradicional do ensino desse campo da Matemática vinculado à aprendizagem de regras para a manipulação de símbolos, simplificação de expressões algébricas e resolução de equações e expressões. Este pode ser um dos motivos que faz com que muitos alunos tenham dificuldades, levando-os a formarem uma opinião de que a álgebra estudada na escola não tem nenhuma relação com outros conhecimentos matemáticos e nem com o mundo cotidiano.

Tsamir e os seus colegas (1998) identificam algumas dificuldades dos alunos com relação à resolução de inequações fracionárias:

- ✓ Dificuldades com valores excluídos: as restrições, para cada inequação proposta, foram denominadores não podendo ser nulos. Segundo eles, os alunos produziram, em geral, soluções erradas ao negligenciarem essas restrições. Isto significa que os autores detetaram dificuldades nos alunos em relação às condições da existência de soluções no conjunto dos números reais.
- ✓ Escolha inapropriada de conetivos lógicos: os alunos, com frequência, inverteram o uso dos conetivos "e" e "ou".
- ✓ Dedução incorreta de sinais de fatores a partir do sinal do produto/quociente: a origem desse tipo de dificuldade advém do uso de afirmações insuficientes do tipo:

$$\frac{A}{B} > 0 \Rightarrow A > 0 \; e \; B > 0; A^2 > B^2 \Rightarrow A > B \vee A^2 < B^2 \Rightarrow A < B$$

- ✓ Resolver equação no lugar de inequação: Alguns alunos, em algumas inequações, simplesmente trocaram o sinal de desigualdade (> ou <) pelo sinal de igualdade (=) e resolveram inequações como se fossem equações.
- ✓ Multiplicar ou dividir por fatores que não são necessariamente positivos: uma boa parte dos alunos multiplicou ambos os membros de inequações pelo denominador sem levar em conta o caso em que o denominador era negativo.

Assim, considerou-se que os erros categorizados nos dois últimos *bullets* tiveram sua origem no uso de processos de resolução válidos para a equação como se fossem válidos para a inequação.

Neste sentido, a meu ver, o impacto das similaridades estruturais entre equações e inequações cria um forte sentimento intuitivo de que os procedimentos usados para resolver equações poderão ser usados, também, para inequações. Por seu turno Douady (1986) identifica, as seguintes, representações usadas como recursos na resolução de inequações:

- ✓ RA (uso da representação algébrica somente);
- ✓ RA+RG (combinação entre a representação algébrica e a representação gráfica);
- ✓ RA+RN (combinação entre a representação algébrica e a representação numérica).

Para o efeito, o presente estudo alicerça-se na teoria de Douady (1986), pois se acredita que para o aluno mobilizar diversos registros de representação, ao estudar inequações racionais fracionárias, é necessário que o professor também mobilize ou crie condições, por meio de tarefas, que permitam tal mobilização por parte dos alunos.

METODOLOGIA

Para uma melhor análise das dificuldades, erros e concepções alternativas apresentadas pelos alunos na resolução de inequações racionais fracionárias, recorreu-se a uma abordagem da investigação qualitativa, utilizando como instrumentos de recolha de dados a análise documental (Plano Curricular do Ensino Secundário Geral (PCESG), Programa de Matemática do 2º Ciclo e livros didáticos de Matemática da 11ª classe de Vuma e Cherinda (2009) e de Fagilde (2011) e os livros de Neves et al (1990) e de Netto e Almeida (1991), observação de aulas e aplicação de um instrumento investigativo contendo seis (6) inequações.

ANÁLISE DOS RESULTADOS

Apresentaremos as análises realizadas a partir dos estudos desenvolvidos com as leituras dos autores que fundamentaram essa pesquisa. Para melhor compreensão, organizamos as analises em subtópicos que seguem:

1. Descrição dos tipos de dificuldades, erros e concepções alternativas apresentadas pelos alunos na resolução de inequações racionais fracionárias.

A questão que foi aplicada aos alunos que participaram da pesquisa foi a seguinte: $\frac{5}{x-2} > 0$

Com esta questão, o objetivo era o de descrever os tipos de dificuldades, erros e concepções alternativas apresentadas pelos alunos na resolução deste tipo de inequação. A tabela, a seguir, apresenta o desempenho dos 55 alunos que têm como respostas certas, erradas e em branco.

Tabela 1: Desempenho do grupo alvo (N = 55)

Inequação	Respostas Certas	Respostas Erradas	Respostas em Branco

	Frequência	%	Frequência	%	Frequência	%
$\frac{5}{x-2} > 0$	14	25	27	50	14	25

Fonte: Dados da pesquisa 2012, elaboração do autor.

Nesta inequação, o número de testes com respostas certas foi de 14 que corresponde a 25% dos testes.

Dos 14 alunos que acertaram 12 resolveram a inequação de forma muito simples: Como $\frac{5}{x-2} > 0$. Eles apenas impuseram a condição de que $x-2>0$ e obtiveram a resposta certa em poucas passagens.

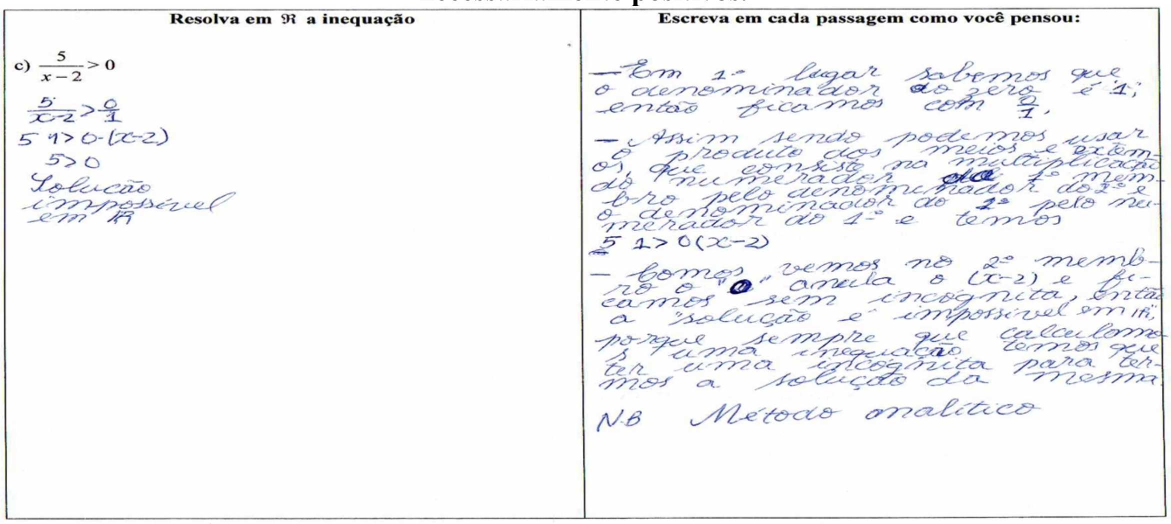
Constatamos na resolução desta inequação que 50% do total de testes (27 alunos) continham uma resposta errada, dos quais 33% (9 alunos) cometeram o erro do tipo "multiplicar ou dividir por fatores (MDF) que não são necessariamente positivos". Um exemplo desse tipo de erro cometido é o seguinte: $\frac{5}{x-2} > 0 \Rightarrow 5 > 0(x-2) \Rightarrow 5 > 0$.

Observando o erro descrito e a justificação do aluno na figura 1, constatamos que o aluno não se preocupou com o domínio de existência, isto é, com o facto de o denominador de $\frac{5}{x-2}$ não poder ser nulo e com o sinal que (x-2) pode ter. A causa do erro esteve no facto de o aluno não ter colocado a condição de existência, isto é, não ter se preocupado com o denominador de $\frac{5}{x-2}$ que não pode ser nulo.

Da figura 1 que, se segue, pode-se compreender melhor, na justificação, o raciocínio do aluno e a causa do erro, quando diz "Em 1º lugar sabemos que o denominador do zero é 1; então ficamos com 0/1. Assim sendo, podemos usar o produto dos meios e extremos que consiste na multiplicação do numerador do 1º membro pelo denominador do 2º e o denominador do 1º pelo numerador do 1º e temos $5.1 > 0(x-2)$". Isto é consistente com a visão científica em termos matemáticos. Todavia, tratando-se da resolução de inequação esta visão ou este procedimento do aluno não está correto (a).

Na figura abaixo apresentamos um exemplo de teste contendo este tipo de erro.

Figura 1: Exemplo de erro do tipo multiplicar ou dividir por fatores (MDF) que não são necessariamente positivos.



Resolva em $\Re$ a inequação	Escreva em cada passagem como você pensou:
c) $\frac{5}{x-2} > 0$ $\frac{5}{x-2} > \frac{0}{1}$ $5 \cdot 1 > 0 \cdot (x-2)$ $5 > 0$ Solução impossível em $\mathbb{R}$	– Em 1º lugar sabemos que o denominador do zero é 1; então ficamos com $\frac{0}{1}$. – Assim sendo podemos usar o produto dos meios e extremos, que consiste na multiplicação do numerador do 1º membro pelo denominador do 2º e o denominador do 2º pelo numerador do 1º e temos $5 \cdot 1 > 0(x-2)$ – Como vemos no 2º membro o "0" anula o $(x-2)$ e ficamos sem incógnita, então a "solução é impossível em $\mathbb{R}$; porque sempre que calculamos uma inequação temos que ter uma incógnita para termos a solução da mesma. N.B Método analítico

Fonte: Dados da pesquisa 2012, elaboração do autor.

Ainda, nos 27 testes com respostas incorretas, observamos que 9 alunos deixaram de mencionar a condição de existência $x-2 \neq 0$, ou seja $x \neq 2$, o que corresponde a um erro do tipo "dificuldades com valores excluídos".

Em relação aos 14 (25%) testes em branco, os alunos só iniciaram as resoluções, abandonando-as num estágio preliminar que não permitia dizer se eles alcançariam respostas certas ou erradas. Por esta razão, se categoriza esses testes como contendo respostas em branco.

2. Análise de influências de tipo de representação que induz ao erro ou facilita a resolução correta de cada tipo de inequação.

Nesta seção, está em destaque a análise da influência de tipos de representações que induzem ao erro ou facilitam a resolução correta de cada tipo de inequação tendo como bases teóricas as contribuições de Douady (1986).

A questão que foi aplicada aos alunos que participaram da pesquisa foi a seguinte: $\frac{2x-5}{x-2}$**<1.** A tabela a seguir descrimina tipos de representações usadas pelos alunos para resolverem a inequação.

Tabela 2: Categorização do tipo de representações usadas pelo grupo alvo (N=55)

Inequação	**Representações usadas pelos alunos**			**Reposta em Branco**
	RA	**RA+RG**	**RA+RN**	
$\frac{2x-5}{x-2}<1$	21 (4)[1]	29 (16)[2]	0	5

Fonte: Dados da pesquisa 2012, elaboração do autor.

Quando elaboramos as inequações que fariam parte do teste, para além de seguirmos as sugestões de Neves e Alves (1990), de Netto e de Almeida (1991), do Vuma e Cherinda (2009) e da autora Fagilde (2011), também nos preocupamos em escolher inequações cujas resoluções pudessem ocorrer combinação entre representações.

Entre os 50 alunos que resolveram a inequação, 21 (42%) optaram por usar, apenas, a representação algébrica (RA). Destes, apenas 4 alunos acertaram e os restantes 17 erraram. A escolha de usar somente a representação algébrica (RA) não foi adequada e isto contribuiu, possivelmente, para o alto índice de resultados errados.

Segue-se o extrato do teste de um aluno que usou apenas a representação algébrica (RA) e por esse fato, obteve o resultado errado.

Figura 2.1: Uso da representação algébrica (RA)

[1] Entre parênteses são dados os números de alunos que resolveram corretamente em cada representação.
[2] Entre parênteses são dados os números de alunos que resolveram corretamente em cada representação.

Resolva em $\Re$ a inequação	Escreva em cada passagem como você pensou:
e) $\frac{2x-5}{x-2} < 1$ $(1)\ (x-2)$ $\frac{2x-5}{\cancel{x-2}} < \frac{x-2}{\cancel{x-2}}$ $2x-5<x-2$ $2x-x<5-2$ $x<3$	1º Fiz o mmc das bases depois multipliquei pelo numeradores e obtive mesmas bases e simplifiquei as bases trabalhei com os numeradores 2º trabalhei com termos com icognita e termos independetes subtrai e obtive o resultado.

Fonte: Dados da pesquisa 2012, elaboração do autor.

Observando-se a resolução, juntamente às justificativas apresentadas na figura 2.1, constata-se que se trata da representação algébrica (RA). Nas justificativas ficou claro o emprego da citada representação, conforme os dizeres do aluno:

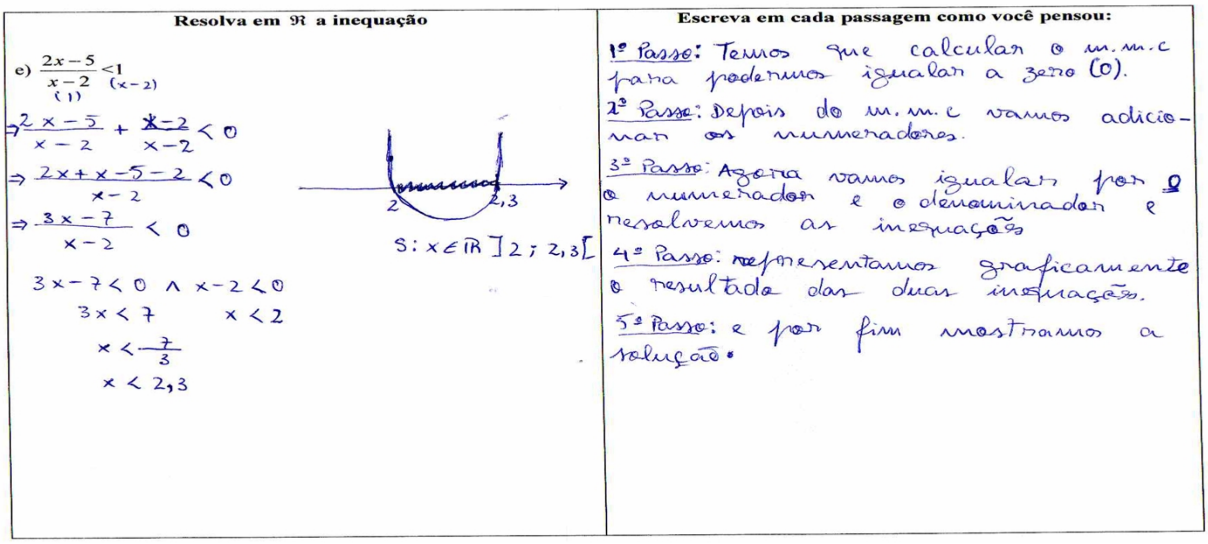
> *fiz o mmc das bases depois multipliquei pelo numeradores e obtive mesmas bases e simplifiquei as bases, trabalhei com os numeradores, trabalhei com termos icognita termos independentes subtrai e obtive o resultado* (ALUNO A).

O aluno A está de acordo com a visão científica em termos matemáticos. Contudo, no que concerne à expressão “bases”, pode representar uma concepção alternativa e/ou dificuldade conceptual do aluno. Este aluno não consegue diferenciar os conceitos “bases” e “denominador”.

Dos 50 alunos que resolveram esta inequação, 29 (58%) optaram pela combinação entre as representações algébrica (RA) e gráfica (RG), dos quais 16 resolveram corretamente.

Como exemplo da combinação entre a representação algébrica (RA) e gráfica (RG) na inequação, segue o extrato do teste de um aluno que resolveu erradamente.

Figura 2: Uso da combinação entre representações (RA+RG)



Resolva em $\Re$ a inequação	Escreva em cada passagem como você pensou:
e) $\frac{2x-5}{x-2} < \frac{1}{(1)}$ $(x-2)$ $\Rightarrow \frac{2x-5}{x-2} + \frac{x-2}{x-2} < 0$ $\Rightarrow \frac{2x+x-5-2}{x-2} < 0$ $\Rightarrow \frac{3x-7}{x-2} < 0$ $3x-7<0 \wedge x-2<0$ $3x<7 \quad x<2$ $x<\frac{7}{3}$ $x<2,3$ 2 2,3 $S: x \in \mathbb{R}\ ]2; 2,3[$	1º Passo: Temos que calcular o m.m.c para podermos igualar a zero (0). 2º Passo: Depois do m.m.c vamos adicionar os numeradores. 3º Passo: Agora vamos igualar por 0 o numerador e o denominador e resolvemos as inequações 4º Passo: representamos graficamente o resultado das duas inequações. 5º Passo: e por fim mostramos a solução.

Fonte: Dados da pesquisa 2012, elaboração do autor.

Categorizamos como combinação entre as representações algébrica e gráfica (RA+RG), pois, de acordo com a justificação do aluno:

> *Temos que calcular o m.m.c para podermos igualar a zero (0) depois do mmc vamos adicionamos os numeradores,..., representamos graficamente e o resultado das duas inequações e por fim mostramos a solução* (ALUNO B).

Todavia, a parte relativa à expressão “igualar o”. Pode representar uma concepção alternativa ou erro conceitual do aluno, pois, ele faz confusão entre o sinal de igualdade com o de desigualdade.

Dos 55 alunos, 21 (38%) usaram somente a representação algébrica, 29 (53%) optaram pela combinação de RA e RG e 5 (9%) não resolveram a inequação.

CONCLUSÃO

Após análise dos estudos consideramos que uma das origens das dificuldades dos alunos, no estudo de inequações, está no processo de ensino-aprendizagem que privilegia o aspecto algorítmico em detrimento do aspecto conceitual (conceitos, propriedades e princípios).

Apesar da maioria dos alunos ter usado a RA (58%) apresentam maiores dificuldades motivados pela manipulação incorreta da representação algébrica.

Esperamos que este estudo contribua para a investigação em Educação Matemática de maneira que avancemos na qualidade da educação no país e no mundo em geral do ponto de vista da melhoria da aprendizagem na mesma área.

O uso das diferentes representações, nomeadamente: algébrica, gráfica e numérica, de uma forma combinada no ensino de inequações poderá permitir que os alunos aprendam a resolver, de várias maneiras, problemas relacionados com inequações racionais fracionárias.

Os professores, trabalhando simultaneamente com equações e inequações (mesmo que antes disso tenham trabalhado sequencialmente com equações e depois com inequações), fazendo um paralelo na tentativa de evitar analogias inapropriadas entre os procedimentos de resolução desses dois conteúdos matemáticos, usando um quadro comparativo, espelhando semelhanças e diferenças poderão minimizar as dificuldades dos alunos na aprendizagem deste conteúdo matemático.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

COSTA. MA. J. **Visualização e mudança de quadros numa perspectiva construtivista: uma contribuição para o estudo das inequações**. Trabalho de diploma. Universidade Pedagógica: Moçambique, 1998.

DOUADY. RE. **Jeux de cadre et dialectique outil-objet dans l'ensignement des mathématiques. Recherches en didactique des mathématiques**: Paris, V. 7, n. 2, p. 5-31, 1986.

FAGILDE. SA. A. M. **M11-Matemática 11ª classe. Programa actualizado**. Textos Editores: Lda-Moçambique, 2011.

HUILLET. DA. **Analytical or graphical resolution? The inequalities case. Proceedindins of the 2nd National Congress of Association for Mathematics Education of South Africa**: Cape Town, p. 79-89, 1996.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CULTURA. **Programa de Matemática do ensino secundário, 2º ciclo**. Maputo: Moçambique, 2009.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CULTURA (MEC) E INSTITUTO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO (INDE). **Plano Curricular do Ensino Secundário**

Geral (PCESG): Documento Orientador, objectivos, Política, Estrutura, Plano de estudos e Estratégias de Implimentação, 2007.

MONJANE. TE. L. M. **Análise de erros dos alunos da 8ª classe na resolução de sistemas de equações com duas incógnitas**. UP. FCNM, 2001.

NETTO. S. DI P, DE ALMEIDA N. S. **Matemática Curso Fundamental**. 2ª ed. Vol. 1, 2º Grau, São Paulo: Editora Scipione. 1991.

NEVES. MA. A, VIERA. M. T. C, ALVES, A. G. **Livro de testo de matemática do 10º ano**, 2ª ed. 1º Volume, Porto Editora,1990.

TSAMIR. P, ALMOG. N, TIROSH. D. **Students` Solutions of inequalities. Proceedings of PME 22. Stellenbosch, South África**, Vol. IV, p. 129-136. 1998.

VUMA. JO. P, CHERINDA. MA. **Matemática 11ª classe, Pré-Universitário: Novo currículo do ensino secundário**. Maputo: Longman Moçambique, 1ª ed., 2009.